الرياضة البحتة
وتطبيقاتها التجارية

إعداد
قسم الرياضة والتأمين
كلية التجارة - جامعة القاهرة

الفهرس

مقدمة ٥

الوحدة الأولى والثانية نظرية الاحتمالات ٧

- مفهوم الاحتمالات وقاعدة الإحتمال العكسى. ٧
- القواعد الأساسية لنظرية الإحتمالات. ٧
- قواعد بييز فى الاحتمالات. ٣٥
- نظرية ذات الحدين فى الاحتمالات. ٤٥

الوحدة الثالثة التطبيقات التجارية الخاصة بالإحتمالات ٥٥

- مراقبة جودة الإنتاج. ٥٥
- المنفعة المتوقعة فى إتخاذ القرارات الإدارية. ٦٣

الوحدة الرابعة التفاضل ٧٩

- مفهوم التفاضل. ٧٩
- كيفية إجراء عملية التفاضل. ٨١
- القواعد الأساسية للتفاضل. ٨١
- التطبيقات التجارية الخاصة بالتفاضل. ٨٥

الوحدة الخامسة المحـــــددات ٩٣

١- مفهوم المحدد. ٩٣

٢- مفكوك المحدد من الدرجة الثانية. ٩٤

٣- مفكوك المحدد من الدرجة الثالثة. ٩٤

٤- مفكوك المحدد من الدرجة الرابعة فأكثر. ٩٩

٥- حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات. ١٠٠

الوحدة السادسة المـــصفوفات ١٠٩

١- أنواع المصفوفات. ١٠٩

٢- العمليات الرياضية على المصفوفات. ١١٢

٣- حل المعادلات باستخدام المصفوفات. ١٢٠

الوحدة السابعة الدوال ١٣١
١- تعريف الدالة. ١٣١
٢- تمثيل الدالة بيانياً. ١٣١
٣- طرق إيجاد الدوال ١٣٥
الوحدة الثامنة النهايات ١٤٥
١- الأعداد الحقيقية والأعداد غير الحقيقية. ١٤٥
٢- الأساليب الرياضية المستخدمة فى إيجاد قيمة الدالة ١٤٧
الوحدة التاسعة الطريقة البيانية فى حل مشاكل البرمجة الخطية ١٦٧
١- مقدمة. ١٦٧
٢- مكونات نموذج مشكلة البرمجة الخطية. ١٦٧
٣- خطوات حل مشكلة البرمجة الخطية بيانياً. ١٦٨

تقديم

تبرز فى الوقت الحاضر بشكل واضح أهمية استخدام الأساليب الكمية فى كافة المجالات التطبيقية، ومن هنا تأتى أهمية دراسة الموارد الرياضية بصفة عامة.

وتعتبر الرياضيات بفروعها المختلفة من أهم الأدوات التى ساعدت الإنسان منذ الحضارات الأولى إلى عصر غزو الفضاء الذى نعيش فيه.

وإن تطور الرياضيات فى الوقت الحاضر يعكس بصورة واضحة التطور الهائل فى النشاط الفكرى للبشرية، والذى يتسع ويمتد لتغطية الأحداث الاقتصادية والاجتماعية للمجتمع الدولى.

ويتضمن هذا الكتاب الموضوعات الآتية تتناول نظرية الإحتمالات والتعاريف والقاعدة الأساسية لنظرية الإحتمالات، وإستخدام توزيع ثنائى الحدين فى الإحتمالات، والتطبيقات التجارية الخاصة بالاحتمالات والتى تختص بمراقبة جودة الإنتاج وأسلوب المنفعة المتوقعة وإتخاذ القرارات الإدارية، والتفاضل وتطبيقاته التجارية، والمحددات، والمصفوفات، والدوال، والنهايات، والطريقة البيانية فى حل مشاكل البرمجة الخطية.

وإننا إذا تقدم هذا المرجع نرجو أن نساعد فى خلق مكتبة عربية للرياضيات البحتة وأن تكون ذات نفع لمن يدرس هذا العلم أو يعمل فى حقله.

الوحدة الدراسية الأولى

التعاريف والقواعد الأساسية لنظرية الاحتمالات

مقدمة:-

تعتبر الاحتمالات من أهم فروع الرياضيات التى تستخدم فى مجالات التقدم العلمى والتى تقوم عليها الكثير من الدراسات ومن بينها الدراسات التجارية. فقد ظلت الإحتمالات زمناً طويلاً ولا تزال الدعامة التى تقوم عليها نظرية الخطر والتأمين كما أنها أخذت مكان الصداره فى إدارة الأعمال من حيث مراقبة جودة الإنتاج والمخزون بالإضافة إلى أنها أصبحت من الأساسيات فى بحوث العمليات سواء ما كان منها متصلاً بالمحاسبة الإدارية أو محاسبة التكاليف أو إدارة الأعمال أو الإحصاء الرياضى.

وقبل أن نبدأ فى تعريف الإحتمال يتعين علينا إلقاء الضوء على بعض التعارف الأساسية الخاصة بالإحتمالات.

١- تعريف الحادث :-

يعرف الحادث بأنه فئة جزئية من فئة النتائج الشاملة حيث أن أى تجربة يكون لها مجموعة من النتائج. فمثلا عند إلقاء زهرة نرد (زهرة طاولة) على سطح أملس فإذا سألنا عن فئة النتائج الشاملة فهى تتمثل فى ظهور الأرقام (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦) وإذا سألنا عن ظهور الأرقام الفردية فقط فإن الحدث (أ) يتمثل فى ظهور الأرقام (١،٣،٥) وإذا سألنا عن ظهور الأرقام الزوجية فقط فإن الحدث (ب) يتمثل فى ظهور الأرقام (٢،٤،٦) ويعتبر الحادثان أ، ب كل منهما فئة جزئية من فئة النتائج الشاملة.

٢- تعريف الحوادث :-

١/٢ الحوادث المؤكدة الوقوع :

وهى الحوادث التى يكون الشخص متأكداً تماماً من وقوعها أو حدوثها دون حاجة لإجراء تجارب مقدماً فعلى سبيل المثال يمكن القول أنه من المؤكد إذا ألقينا قطعة نقود على سطح أملس سيكون الناتج صورة أو كتابة ويمكن القول أيضاً أنه من المؤكد أن تشرق الشمس من الشرق وتغرب من الغرب فكل هذه الأحداث نتيجتها معروفة مقدماً دون حاجة لإجراء أى تجارب عملية للتحقق من النتيجة.

وعلى هذا الأساس تكون نسبة وقوع هذه الحوداث ١٠٠%.

٢/٢ الحوادث المؤكدة عدم الوقوع (الحوادث المستحيلة):

وهى الحوادث التى يكون الشخص متأكداً تماماً من عدم وقوعها أو حدوثها دون حاجة لإجراء تجارب مقدماً فعلى سبيل المثال يمكن القول أنه من المؤكد أن الشمس لا تشرق من الغرب ومثال آخر إذا ألقينا قطعة نقود على سطح أملس فمن المؤكد عدم ظهور الصورة أو الكتابة معاً فى وقت واحد أو بمعنى آخر يستحيل ظهور الصورة أو الكتابة فى وقت واحد. ويعتبر نتيجة وقوع هذه الحوادث معروفة مقدماً دون حاجة لإجراء أى تجارب عملية للتحقق من هذه النتيجة.

وعلى هذا الأساس تكون نسبة وقوع هذه الحوداث = صفر%.

٣/٢ الحوادث غير المؤكدة الوقوع :

فى حالة عدم وجود عنصر التأكد بالنسبة لتوقع أى شخص بمعنى أن الشخص يكون غير متأكد من وقوع حادث ما وغير متأكد أيضاً من عدم وقوعه فيطلق على هذه الحالة لفظ من المحتمل وهو لفظ يدل على حادث غير مؤكد الوقوع وغير مؤكد عدم الوقوع.

وعلى سبيل المثال نقول من المحتمل نجاح طالب بالسنة الأولى بكلية التجارة – جامعة القاهرة – هذا العام. وأيضا من المحتمل وصول الطائرة القادمة من مطار لندن إلى مطار القاهرة فى الميعاد المحدد لها. وأيضا من المحتمل أن يظهر على السطح العلوى صورة لقطعة نقود ألقيت على سطح أملس.

ومن العرض السابق يمكن ان نصل إلى تعريف محدد للإحتمال.

٣- تعريف الإحتمال :

الاحتمال هو عبارة عن نسبة تحقق الحدث أو المجموعة الفرعية بالنسبة للمجموعة الشاملة أو الكلية. أو هو كسر أكبر من الصفر وأقل من الواحد الصحيح. كما يمكن تعريف الاحتمال أيضا بأنه التكرار النسبى لتحقق حادث معين وعلى أساس هذا التعريف يكون :-

$$\text{إحتمال وقوع حادث ما} = \frac{\text{الحدث أو المجموعة الفرعية}}{\text{المجموعة الشاملة أو الكلية}}$$

أو

$$\text{إحتمال وقوع حادث ما} = \frac{\text{عدد الحالات التى تحقق الإحتمال}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

وبطريقة أخرى

$$\text{إحتمال وقوع حادث ما} = \frac{\text{عدد الحالات المواتية أو الموافقة لتحقق الإحتمال}}{\text{عدد الحالات الممكنة أوالكلية لتحقق جميع الحوداث}}$$

فإذا كان عدد الحالات المواتية أو الموافقة لتحقق الحادث أ هى م حالة من بين عدد الحالات الممكنة أو الكلية وهى ن حالة. فإن :-

$$\text{ح (أ)} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

ملاحظات هامة :

أ- الإحتمال عبارة عن كسر أكبر من الصفر وأقل من الواحد الصحيح.

ب- لا يمكن أن يكون الإحتمال قيمة سالبة.

جـ- لا يمكن أن يزيد الإحتمال عن الواحد الصحيح.

٤- أنواع الإحتمالات :

تنقسم الإحتمالات إلى نوعين رئيسين هما :-

١/٤ الإحتمال النظرى أو الرياضى أو الحسابى :

Mathematical Probability

يتم حساب الإحتمال النظرى أو الرياضى دون حاجة لإجراء تجارب معينة وتعتبر قيمة هذا الاحتمال ثابتة لا تختلف بإختلاف الفرد أو الزمان أو المكان. فعلى سبيل المثال إذا ألقيت زهرة طاولة على سطح أملس فإن إحتمال ظهور أى رقم من الأرقام على السطح العلوى للزهرة = $\frac{١}{٦}$ وإذا ألقت قطعة نقود مرة واحدة على سطح أملس فإن إحتمال ظهور الشعار الجمهورى على السطح العلوى = $\frac{١}{٢}$

ويلاحظ أنه لتحقق الإحتمال النظرى يشترط أساساً وجود التناسق والتجانس والتماثل والتساوى فى المفردات موضوع الدراسة كتجانس المادة المصنوعة منها قطعة النقود كذلك تناسق وتساوى سمك هذه القطعة فى أى جزء من أجزائها.

كما يمكن تقسيم الإحتمال النظرى أو الرياضى أو الحسابى إلى :-

١/١/٤ إحتمال بسيط : Simple Probability

وهو ما يتعلق بحادث واحد فقط بسيط والحادث البسيط هو عبارة عن فئة جزئية أو فرعية تشمل ناتج واحد فقط من نتائج الفئة الشاملة.

٢/١/٤ إحتمال مركب : Compound Probability

وهو ما يتعلق بعدة حوادث بسيطة أو بحادث واحد مركب.

٢/٤ الإحتمال التجريبى أو الإحصائى:

Statistical Probability

يتم حساب الإحتمال التجريبى أو الإحصائى من واقع الخبرة الفعلية بعد إجراء تجارب معينة. فعلى سبيل المثال إذا طلب حساب إحتمال ظهور السطح العلوى لزهرة الطاولة وعليه ٤ نقط فى الحالات الآتية :-

أ- إذا ألقيت زهرة الطاولة ٥٠٠ مرة.

ب- إذا ألقيت زهرة الطاولة ١٠٠٠ مرة.

جـ- إذا ألقيت زهرة الطاولة ٣٠٠٠ مرة.

وهنا الأمر يقتضى القيام بثلاث تجارب وتسجيل عدد المرات التى يظهر فيها السطح العلوى لزهرة الطاولة وعليه ٤ نقط فى كل تجربة.

ويلاحظ أن الإحتمال التجريبى يختلف عن الاحتمال النظرى حيث أن الاحتمال النظرى لظهور السطح العلوى لزهرة الطاولة وعليه ٤ نقط إذا ألقى مرة واحدة = ١/٦ = ٠,١٦٧، ومن المعلوم أن الإحتمال النظرى والإحتمال التجريبى يتساويان تقريباً إذا كان عدد الوحدات الخاضعة لتجربة معينة عدداً كبيراً جداً وهذا ما يعبر عنه بقانون الأعداد الكبيرة والذى ينص على:-

" كلما زادت عدد الوحدات الخاضعة لتجربة معينة زيادة لا نهائية كلما تلاشى الفرق بين الإحتمال النظرى والإحتمال التجريبى أى كلما إتجه هذا الفرق إلى الصفر"

فإذا كان لدينا الحادث (أ) وكان عدد مرات وقوعه هى (م) حالة من بين عدد مرات إجراء التجربة وليكن م حالة فإن إحتمال وقوع الحادث (أ) يقترب من قيمة معينة تنطبق تماماً مع الإحتمال النظرى ولتكن هذه القيمة ع. كلما زاد عدد مرات إجراء التجربة (ن) زيادة كبيرة جداً تقترب من ما لانهاية.

ويعبر عن ذلك رياضياً كما يلى :

$$\text{ح (أ)} = \text{نهـا}_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{م}}{\text{ن}} = \text{ع}$$

٥- قاعدة الإحتمال العكسى (الاحتمال التكميلى):

إذا كان عدد مرات النجاح فى تجربة ما أجريت (ن) من المرات هو (م) حالة وبالتالى فإن عدد حالات الفشل لنفس التجربة يتحدد بالمقدار (ن-م) وعلى ذلك يكون:-

$$\text{إحتمال النجاح} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

$$\text{إحتمال الفشل} = \frac{\text{ن- م}}{\text{ن}}$$

$$\text{إحتمال النجاح + إحتمال الفشل} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} + \frac{\text{ن- م}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{م + ن- م}}{\text{ن}}$$

$$\boxed{\text{إحتمال النجاح + إحتمال الفشل} = ١}$$

ومن العلاقة السابقة يمكن القول أن :-

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{الاحتمال المطلوب + الإحتمال العكسى} = ١ \\ \text{الاحتمال المطلوب} = ١\text{- الإحتمال العكسى}\end{array}}$$

وعن طريق العلاقة السابقة يمكن إيجاد أحد الإحتمالين بمعلومية الإحتمال الآخر.

أمثلة متنوعة

مثال (١) :

ألقى مكعب منتظم (زهرة طاولة) مرقم بالأرقام من ١-٦ على سطح أملس أحسب الاحتمالات الآتية:-

أ - إحتمال ظهور الرقم (١) على السطح العلوى للزهرة.

ب - إحتمال ظهور الرقم (٢) على السطح العلوى للزهرة.

جـ- إحتمال ظهور الرقم (٣) على السطح العلوى للزهرة.

د - إحتمال ظهور الرقم (٤) على السطح العلوى للزهرة.

هـ- إحتمال ظهور الرقم (٥) على السطح العلوى للزهرة.

و - إحتمال ظهور الرقم (٦) على السطح العلوى للزهرة.

ز – مجموع الإحتمالات السابقة.

ح - إحتمال ظهور الرقم (٧) على السطح العلوى للزهرة.

الحل :-

أ - إحتمال ظهور الرقم (١) على السطح العلوى للزهرة.

$$= \frac{\text{عدد الأوجه التى تحمل الرقم واحد}}{\text{عدد الأوجه الكلية}} = \frac{١}{٦}$$

ب - إحتمال ظهور الرقم (٢) على السطح العلوى للزهرة.

$$= \frac{\text{عدد الأوجه التى تحمل الرقم (٢)}}{\text{عدد الأوجه الكلية}} = \frac{١}{٦}$$

جـ- إحتمال ظهور الرقم (٣) على السطح العلوى للزهرة.

$$= \frac{\text{عدد الأوجه التى تحمل الرقم (٣)}}{\text{عدد الأوجه الكلية}} = \frac{١}{٦}$$

د - إحتمال ظهور الرقم (٤) على السطح العلوى للزهرة.

$$= \frac{\text{عدد الأوجه التى تحمل الرقم (٤)}}{\text{عدد الأوجه الكلية}} = \frac{١}{٦}$$

هـ- إحتمال ظهور الرقم (٥) على السطح العلوى للزهرة.

$$= \frac{\text{عدد الأوجه التى تحمل الرقم (٥)}}{\text{عدد الأوجه الكلية}} = \frac{١}{٦}$$

و - إحتمال ظهور الرقم (٦) على السطح العلوى للزهرة.

$$= \frac{\text{عدد الأوجه التى تحمل الرقم (٦)}}{\text{عدد الأوجه الكلية}} = \frac{١}{٦}$$

ز – مجموع الإحتمالات السابقة.

$$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = ١$$

ح - إحتمال ظهور الرقم (٧) على السطح العلوى للزهرة.

$$= \frac{\text{عدد الأوجه التى تحمل الرقم (٧)}}{\text{عدد الأوجه الكلية}} = \frac{\text{صفر}}{٦}$$

حالة إستحالة مطلقة وهذا يعتبر حادث مؤكد عدم الوقوع

مثال (٢) :

ورقة لعب عددها ٥٢ ورقة سحبت منها ورقة واحدة. أحسب الاحتمالات الآتية:-

أ - إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة ولد.

ب - إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة بنت.

جـ- إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة صورة.

د - إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة من الأوراق ذات اللون الأحمر.

هـ- إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة السبعة الطيبة (الكومى).

الحل :-

أ - إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة ولد.

عدد الأوراق التى تحمل صورة ولد ٤

= ——— = ———

عدد الأوراق الكلية ٥٢

ب- إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة بنت.

عدد الأوراق التى تحمل صورة بنت ٤

= ——— = ———

عدد الأوراق الكلية ٥٢

جـ- إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة صورة.

عدد الأوراق التى تحمل صورة ١٢

= ——— = ———

عدد الأوراق الكلية ٥٢

د- إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة من الأوراق ذات اللون الأحمر.

عدد الأوراق اللون الأحمر ٢٦

= ——— = ———

عدد الأوراق الكلية ٥٢

هـ- إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة (السبعة الطيبة).

عدد الأوراق التى تحمل السبعة الطيبة ١

= ——— = ———

عدد الأوراق جميعها ٥٢

مثال (٣)

صندوق به ٣٠ كرة حمراء، ٥٠ كرة بيضاء، ٢٠ كرة صفراء، سحبت منه كرة واحدة. أحسب الاحتمالات الآتية:

١- إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

٢- إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

٣- إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة صفراء.

٤- إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء.

الحل :

١- إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

عدد الكرات الحمراء

= ———

عدد الكرات جميعها

٣٠

= ——— = ٠,٣

١٠٠

٢- إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

عدد الكرات البيضاء

= _____

عدد السلع جميعها

٥٠

= _____ = ٠,٥

١٠٠

٣- إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة صفراء.

عدد السلع الصفراء

= _____.

عدد السلع جميعها

٢٠

= _____ = ٠,٢

١٠٠

٤- إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء.

عدد السلع السوداء

= _____

عدد السلع جميعها

صفر

= _____ = صفر

١٠٠

حالة إستحالة مطلقة (حادث مؤكد عدم الوقوع)

مثال (٤) :

مخزن به ٩٠ سلع جيدة، ١٠ سلعة رديئة، فإذا تم سحب سلعة واحدة عشوائياً من هذا المخزن. أحسب الاحتمالات الآتية:

١- إحتمال أن تكون السلعة المسحوبة جيدة.

٢- إحتمال أن تكون السلعة المسحوبة رديئة.

الحل :

١- إحتمال أن تكون السلعة المسحوبة جيدة.

عدد السلع الجيدة

= _____

عدد السلع جميعها

٩٠

= _____ = ٠,٩

١٠٠

أو بإستخدام قاعدة الإحتمال العكسى.

إحتمال أن تكون السلعة جيدة = ١ - إحتمال أن تكون السلعة رديئة.

= ١ – ٠,١ = ٠,٩

٢- احتمال أن تكون السلعة المسحوبة رديئة.

عدد السلع الرديئة

= _____

عدد السلع جميعها

١٠

= _____ = ٠,١

١٠٠

، بإستخدام قاعدة الإحتمال العكسى.

إحتمال أن تكون السلعة رديئة = ١ - إحتمال أن تكون السلعة جيدة.

= ١ – ٠,٩ = ٠,١

٦- الإحتمالات المركبة :- Compound Probability

تتعلق الإحتمالات المركبة بعدة حوادث بسيطة أو بحادث واحد مركب والحادث المركب عبارة عن فئة جزئية تشمل أكثر من ناتج واحد من نتائج الفئة الشاملة وتتحدد العلاقة بين الظواهر والحوادث المختلفة من خلال المجموعات التالية :-

أ- مجموعة الحوادث المانعة أو المتنافرة أو المتعارضة :

هى مجموعة الظواهر أو الحوادث أو النواتج التى إذا تحقق إحداها يمنعه أو يلغى تماماً وقوع الحوادث الأخرى بمعنى أخر يستحيل وقوع مجموعة من الحوادث المانعة أو المتعارضة فى وقت واحد.

ب- مجموعة الحوادث المشتركة جزئياً :-

تعتبر الظواهر أو الحوادث مشتركة جزئيا إذا كان بينها عناصر مشتركة وأمكن لكل حادث أن يقع منفرداً على حده كما يمكن للحوادث جميعها أن تتحد أو تقع مشتركة جزئياً فقط وفى نفس الوقت.

جـ- مجموعة الحوادث المستقلة :

هى مجموعة الظواهر أو الحوادث التى إذا وقع إحداها لا يؤثر على وقوعه باقى الحوادث الأخرى ويمكن للحوادث جميعها أن تقع معاً فى وقت واحد.

د- مجموعة الحوادث غير المستقلة (الحوادث المرتبطة أو المشروطة):

هى مجموعة الظواهر أو الحوادث التى إذا وقع إحداها يؤثر على وقوع باقى الحوادث الأخرى فتحدث معاً مرتبطة أو مشروطة.

ويتكون الإحتمال المركب من مجموعة الإحتمالات البسيطة للظواهر أو الحوادث أو النواتج المختلفة وذلك بعد معالجتها رياضياً إما عن طريق جمع هذه الإحتمالات أو عن طريق حاصل ضربها وذلك حسب نوع الحوادث المختلفة السابقة والعلاقة بينها. ويتضح ذلك من خلال تطبيق القواعد الأساسية للإحتمالات.

١/٦ القواعد الأساسية لحساب الإحتمالات المركبة:

١/١/٦ قاعدة الجمع :

أ- مجموعة الحوادث المانعة أو المتنافرة أو المتعارضة:

إذا كان لدينا الحادثان المانعان ($أ_١$)، ($أ_٢$) وهذا يعنى أن تحقق الحادث($أ_١$) يمنع أو يلغى تحقق الحادث ($أ_٢$) والعكس صحيح فإن تحقق الحادث ($أ_٢$) يلغى تحقق الحادث ($أ_١$) أى أنه يستحيل حدوثها معاً فى نفس الوقت.

والمثال على ذلك قطعة النقود فكل وجه من أوجه قطعة النقود يمثل حدث بسيط والوجهين معاً يمثلان حادثان مانعان بمعنى يستحيل ظهور الوجهين معاً فى وقت واحد. وكذلك مكعب زهرة الطاولة فكل وجه من أوجه هذا المكعب يمثل حدث بسيط وإذا أخذنا وجهين أو أكثر فإنهما يمثلان عدة حوادث مانعة بمعنى أنه يستحيل ظهور أكثر من وجه واحد على السطح العلوى لمكعب زهرة الطاولة.

فإذا رمزنا لإحتمال وقوع الحادث $أ_١$ بالرمز ح ($أ_١$)

وإذا رمزنا لإحتمال وقوع الحادث $أ_٢$ بالرمز ح ($أ_٢$)

وإذا رمزنا لإحتمال وقوع الحادث $أ_١$ أو الحادث $أ_٢$ بالرمز ح ($أ_١$ أو $أ_٢$) فإن

$$\boxed{ح(أ_١ \text{ أو } أ_٢) = ح(أ_١) + ح(أ_٢)}$$

ملحوظة

الرمز أو ⟵ علامة جمع

يحول إلى

مثال (٥)

بفرض أن لدينا صندوق به ١٠٠ كرة منها ٧٠ كرة حمراء، ٢٠ كرة بيضاء، ١٠كرات صفراء، فإذا سحبنا كرة واحدة من هذا الصندوق فما هو إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو صفراء ثم إحسب إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء أو صفراء.

الحل :

بفرض أن ح ($أ_١$) = إحتمال سحب كرة حمراء.

ح ($أ_٢$) = إحتمال سحب كرة بيضاء.

ح ($أ_١$ أو $أ_٢$) = إحتمال سحب كرة حمراء أو بيضاء

∴ ح ($أ_١$ أو $أ_٢$) = ح ($أ_١$) + ح ($أ_٢$)

$$= \frac{٧٠}{١٠٠} + \frac{٢٠}{١٠٠}$$

$$= \frac{٩٠}{١٠٠}$$

= ٠,٩

وبفرض أن ح ($أ_٣$) = إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة صفراء.

∴ ح ($أ_١$ أو $أ_٢$ أو $أ_٣$) = ح ($أ_١$) + ح ($أ_٢$) + ح ($أ_٣$)

$$= \frac{٧٠}{١٠٠} + \frac{٢٠}{١٠٠} + \frac{١٠}{١٠٠}$$

= ٠,٧ + ٠,٢ + ٠,١

= ١

مثال (٦) :

ألقى مكعب منتظم له ستة أوجه مرقمة بالأرقام من ١-٦ أحسب الاحتمالات الآتية:-

١ - إحتمال ظهور الرقم (٥) أو الرقم (٦) إلى أعلى.

٢- إحتمال ظهور أحد الأرقام (٤) على الأقل.

٣- إحتمال ظهور أحد الأرقام أقل من ٣.

٤- إحتمال ظهور أحد الأرقام (٤) على الأكثر.

٥- إحتمال ظهور أحد الأرقام أكثر من ٣.

الحل :-

١- إحتمال ظهور الرقم (٥) أو (٦)

إذا رمزنا لإحتمال ظهور الرقم (٥) ($أ_١$)

إذا رمزنا لإحتمال ظهور الرقم (٦) ($أ_٢$)

∴ ح ($أ_١$ أو $أ_٢$) = ح ($أ_١$) + ح ($أ_٢$)

$$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٦}$$

٢- إحتمال ظهور أحد الأرقام (٤) على الأقل

هذا الاحتمال يعنى ظهور الأرقام ٤ أو ٥ أو ٦

فإذا رمزنا لإحتمال ظهور الرقم (٤) بالرمز ($أ_١$)

، إذا رمزنا لإحتمال ظهور الرقم (٥) بالرمز ($أ_٢$)

وإذا رمزنا لإحتمال ظهور الرقم (٦) بالرمز ($أ_٣$)

∴ ح ($أ_١$ أو $أ_٢$ أو $أ_٣$) = ح ($أ_١$) + ح ($أ_٢$) + ح ($أ_٣$)

$$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦}$$

$$= \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$

٣- إحتمال ظهور أحد الأرقام أقل من (٣)

هذا الاحتمال يعنى ظهور الأرقام ٢ أو ١

∴ ح (أ١ أو أ٢) = ح (أ١) + ح (أ٢)

$$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦}$$

$$= \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

٤- إحتمال ظهور الأرقام (٤) على الأكثر

هذا الاحتمال يعنى ظهور أحد الأرقام ٤ أو ٣ أو ٢ أو ١

∴ ح (أ١ أو أ٢ أو أ٣ أو أ٤) = ح (أ١) + ح (أ٢) + ح (أ٣) + ح (أ٤)

$$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦}$$

$$= \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$$

٥- إحتمال ظهور أحد الأرقام أكثر من (٣)

هذا الاحتمال يعنى ظهور أحد الأرقام ٤ أو ٥ أو ٦

∴ ح (أ١ أو أ٢ أو أ٣) = ح (أ١) + ح (أ٢) + ح (أ٣)

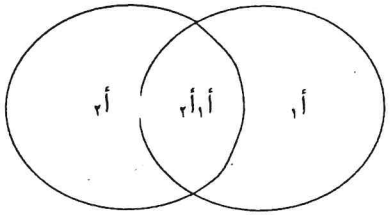
$$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦}$$

$$= \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$

ب - مجموعة الحوادث المشتركة جزئيا:-

١- إحتمال تحقق حادث على الأقل من حادثين :

إذا كان لدينا الحادثان (أ١)، (أ٢) حيث يوجد بينها عناصر مشتركة جزئياً بحيث يمكن للحادث(أ١) أن يقع منفرداً دون وقوع الحادث (أ٢) كما يمكن للحادث (أ٢) أن يقع منفرداً دون وقع الحادث (أ١) ويمكن للحادثان(أ١)، (أ٢) أن يقعا مشتركان في نفس الوقت كما يتضح من الشكل التالى:



تمثل الدائرة الأولى كاملة عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادث (أ١) كما تمثل الدائرة الثانية بالكامل عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادث (أ٢) ويمثل الجزء المظلل (أ١ أ٢) عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادثان (أ١ أ٢) مشتركان.

وإذا ما رمزنا لإحتمال تحقق أحاد الحادثين أو كلاهما أو لإحتمال تحقق حادث واحد على الأقل من الحادثين بالرمز ح (أ١ + أ٢) فيمكن الوصول لهذا الإحتمال كالآتى :

إحتمال تحقق أحد الحادثين أو كلاهما يعنى إحتمال تحقق الحادث الأول (أ١) على إنفراد دون تحقق الحادث الثانى معه + إحتمال تحقق الحادث الثانى (أ٢) على إنفراد دون تحقق الحادث الأول معه + إحتمال تحقق الحادثان (أ١ + أ٢) معاً مشتركان.

فإذا كان عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادث (أ١) على إنفراد دون وقوع الحادث (أ٢) هى م١ حالة.

وكان عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادث (أ٢) على إنفراد دون وقوع الحادث (أ١) هى م٢ حالة.

وكان عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادثان ($أ_١$، $أ_٢$) معاً مشتركان هى $م_{١٢}$ حالة وكان عدد الحالات جميعها ن حالة فإن :-

إحتمال تحقق الحادث ($أ_١$) على إنفراد = $\frac{م_١}{ن}$

إحتمال تحقق الحادث ($أ_٢$) على إنفراد = $\frac{م_٢}{ن}$

إحتمال تحقق الحادث ($أ_١$، $أ_٢$) معا مشتركان = $\frac{م_{١٢}}{ن}$

ويكون إحتمال تحقق أحد الحادثين أو كلاهما = $\frac{م_١}{ن} + \frac{م_٢}{ن} + \frac{م_{١٢}}{ن}$

وبإضافة وطرح = $\frac{م_{١٢}}{ن}$ للإحتمالات السابقة نجد أن

إحتمال تحقق أحد الحادثين أو كلاهما = $\frac{م_١}{ن} + \frac{م_٢}{ن} + \frac{م_{١٢}}{ن} - \frac{م_{١٢}}{ن}$

$$= \left(\frac{م_١ + م_{١٢}}{ن}\right) + \left(\frac{م_٢ + م_{١٢}}{ن}\right) - \frac{م_{١٢}}{ن}$$

$$\therefore ح(أ_١ + أ_٢) = ح(أ_١) + ح(أ_٢) - ح(أ_١ أ_٢)$$

وتمثل ($م_١ + م_{١٢}$) عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادث ($أ_١$) وتمثلها الدائرة الأولى بالكامل كما تمثل ($م_٢ + م_{١٢}$) عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادث ($أ_٢$) وتمثلها الدائرة الثانية بالكامل وهذا يعنى أن الجزء المظلل وهو عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادثان ($أ_١$، $أ_٢$) معاً مشتركان قد تكرر مرتين مع الدائرة الأولى مرة ومع الدائرة الثانية مرة أخرى لذلك وجب حذفه مرة واحدة حتى لا يتكرر إضافة العناصر المشتركة مرتين.

مثال (٧)

إذا كان إحتمال نجاح الطالب فى مادة الرياضة هو ٠,٩ وإحتمال نجاحه فى مادة المحاسبة هو ٠,٦. أوجد إحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من المادتين.

الحل :-

بفرض أن إحتمال نجاح الطالب فى مادة الرياضة ح ($أ_١$)

بفرض أن إحتمال نجاح الطالب فى مادة المحاسبة ح ($أ_٢$)

، إحتمال نجاح الطالب فى المادتين معاً ح ($أ_١$ $أ_٢$)

، إحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من المادتين ح ($أ_١ + أ_٢$)

$$ح(أ_١ + أ_٢) = ح(أ_١) + ح(أ_٢) - ح(أ_١ أ_٢)$$

$$= ٠,٩ + ٠,٦ - (٠,٩ \times ٠,٦)$$

$$= ١,٥ - ٠,٥٤$$

$$= ٠,٩٦$$

حل أخر :- عن طريق قاعدة الإحتمال العكسى.

إحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من المادتين = ١- إحتمال الرسوب فى المادتين.

$$= ١ - (٠,١ \times ٠,٤)$$

= ١ – ٠,٤

= ٠,٩٦

وهو نفس الناتج السابق.

مثال (٨)

إذا كان إحتمال نجاح الطالب فى مادة الإقتصاد هو ٠,٨ وإحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من مادتى الإقتصاد والتنظيم = ٠,٩

إحسب إحتمال نجاح الطالب فى مادة التنظيم.

الحل :-

إحتمال نجاح الطالب فى مادة الاقتصاد = ح (أ١) = ٠,٨

، إحتمال نجاح الطالب فى مادة التنظيم = ح (أ٢) = ؟

، إحتمال نجاح الطالب فى المادتين معاً = ح (أ١ أ٢)

،إحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من المادتين=ح (أ١+أ٢) =٠,٩

ح (أ١ + أ٢) = ح (أ١) + ح (أ٢) - ح (أ١ أ٢)

٠,٩ = ٠,٨ + ح (أ٢) – ٠,٨ × ح (أ٢)

= ٠,٨ + ح (أ٢) [١- ٠,٨]

= ٠,٨ + ٠,٢ ح (أ٢)

٠,٩-٠,٨ = ٠,٢ ح (أ٢)

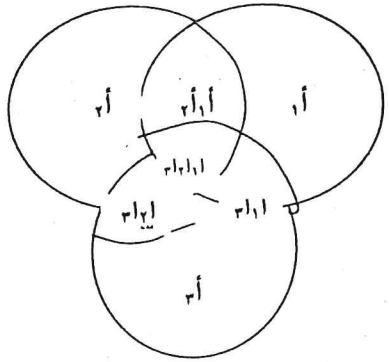
٠,١ = ٠,٢ ح (أ٢)

∴ ح (أ٢) = ٠,٥

٢- إحتمال تحقق حادث على الأقل من ثلاث حوادث :

إذا كان لدينا الحادثان (أ١)، (أ٢)، (أ٣) حيث يوجد بينها حوادث مشتركة جزئياً بحيث يمكن للحادث(أ١) أن يقع منفرداً دون الحادثان (أ٢)، (أ٣) ويمكن للحادث (أ٢) أن يقع منفرداً دون الحادثان (أ١)، (أ٣) كما يمكن للحادث (أ٣) أن يقع منفرداً دون الحادثان (أ١)، (أ٢) ويمكن للحوادث الثلاثة أن تحدث معاً بالإشتراك فى وقت واحد كما يتضح ذلك من

الشكل التالى:



ويلاحظ أن إحتمال تحقق حادث على الأقل من ثلاث حوادث هو عبارة عن حاصل جمع إحتمالات تحقق الحوادث الثلاثة كل إحتمال على حده مطروحاً منه إحتمالات تحقق الحوادث الثلاثة كل إحتمالين معاً مضافاً إليه إحتمال تحقق الحوادث الثلاثة معاً.

ويلاحظ أيضا أن عدد الحدود الخاصة بإحتمالات تحقق الحوادث الثلاثة مفرده يتحدد على أساس ^{٣}ق١ . وأن عدد الحدود الخاصة بإحتمالات تحقق الحوادث الثلاثة معاً يتحدد على أساس ^{٣}ق٣ . وإذا رمزنا للحوادث الثلاث بالرموز أ١، أ٢، أ٣ فإنه يكون لدينا.

ح (أ١ + أ٢ + أ٣) = ح (أ١) + ح (أ٢) + ح (أ٣) – [ح (أ١ أ٢) + ح (أ١ أ٣) +

ح (أ٢ أ٣)] + ح (أ١ أ٢ أ٣)

مثال (٩)

إذا كان إحتمال نجاح الطالب فى مادة الرياضة هو ٠,٩ وإحتمال نجاحه فى مادة السلوكية هو ٠,٨. وإحتمال نجاحه فى مادة الموارد الإقتصادية هو ٠,٧. أوجد إحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من الثلاث مواد.

الحل :-

إحتمال نجاح الطالب فى مادة الرياضة = ح (أ١)

، إحتمال نجاح الطالب فى مادة السلوكية = ح (أ٢)

، إحتمال نجاح الطالب فى مادة الموارد الإقتصادية = ح (أ٣)

، إحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من الثلاث مواد

= ح (أ١ + أ٢+ أ٣)

ح (أ١ + أ٢+ أ٣) = ح (أ١) + ح (أ٢) + ح (أ٣)

- [ح (أ١ أ٢) + ح (أ١ أ٣) +ح (أ٢ أ٣)] + ح (أ١ أ٢ أ٣)

∴ ح (أ١ + أ٢+ أ٣) =٠,٩+ ٠,٨ + ٠,٧ – [(٠,٩ × ٠,٨)+(٠,٩ × ٠,٧)

+ (٠,٨ × ٠,٧)] + (٠,٩ × ٠,٨ × ٠,٧)

= ٢,٤ – (٠,٧٢ + ٠,٦٣ + ٠,٥٦) + ٠,٥٠٤

= ٢,٤ – ١,٩١ + ٠,٥٠٤

= ٠,٤٩ + ٠,٥٠٤

= ٠,٩٩٤

حل أخر :- عن طريق قاعدة الإحتمال العكسى.

إحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من الثلاث مواد

= ١ – (إحتمال الرسوب فى المواد الثلاث)

= ١ – (٠,١ × ٠,٢ × ٠,٣)

= ١ – ٠,٠٠٦

= ٠,٩٩٤

٢/١/٦ قاعدة الضرب :-

أ- مجموعة الحوادث المستقلة :-

إذا كان لدينا الحادثان (أ١)، (أ٢) المستقلان وهذا يعنى أن وقوع الحادث (أ١) لايؤثر على وقوع الحادث (أ٢) والعكس صحيح فوقوع الحادث (أ٢) لايؤثر على وقوع الحادث (أ١) وليس هناك ما يمنع من حدوثها معاً فى وقت واحد.

والأمثلة على الحوادث المستقلة كثيرة فإذا ألقينا قطعتى نقود على سطح أملس فكل قطعة على حدة تمثل حادث مستقل عن القطعة الأخرى وظهور أحد الأوجه فى أى قطعة لا يؤثر على ظهور أى وجه فى القطعة الأخرى، وليس هناك ما يمنع من ظهور صورتان معاً أو كتابتان معاً أو ظهور صورة فى أحد القطعتين مع كتابة على القطعة الأخرى.

فإذا رمزنا لإحتمال وقوع الحادث الأول بالرمز ح (أ١)

وإذا رمزنا لإحتمال وقوع الحادث الثانى بالرمز ح (أ٢)

وإذا رمزنا لإحتمال وقوع الحادثان أ١، أ٢ معاً فى وقت واحد بالرمز ح (أ١ أ٢) فإن :-

$$\boxed{\text{ح (أ١ و أ٢) = ح (أ١) × ح (أ٢)}}$$

ملحوظة **يحول إلى**

الرمز أو ⟵ علامة ضرب

مثال (١٠)

ثلاثة أشخاص أ، ب، جـ إحتمال بقاء كل واحد منهم على قيد الحياة فى نهاية سنة على الترتيب ٠,٨، ٠,٧، ٠,٦ .

إحسب الإحتمالات الآتية :-

أ- إحتمال حياة الثلاثة حتى نهاية السنة.

ب- إحتمال وفاة الثلاثة خلال السنة.

جـ- إحتمال وفاة (أ) فقط من بين الثلاثة خلال السنة.

الحل :

أ- إحتمال حياة الثلاثة حتى نهاية السنة.

وهذا الإحتمال يعنى حياة (أ) وحياة (ب) وحياة (جـ)

∴ ح (أ و ب و جـ) = ح (أ) × ح (ب) × ح (جـ)

= ٠,٨ × ٠,٧ × ٠,٦

= ٠,٣٣٦

ب- إحتمال وفاة الثلاثة خلال السنة.

وهذا الإحتمال يعنى وفاة (أ) ووفاة (ب) ووفاة (جـ)

∴ ح (أ و ب و جـ) = ح (أ) × ح (ب) × ح (جـ)

= (١-٠,٨) (١-٠,٧) (١-٠,٦)

= ٠,٢ × ٠,٣ × ٠,٤

= ٠,٠٢٤

جـ- إحتمال وفاة (أ) فقط خلال السنة :-

وهذا يعنى إحتمال وفاة (أ) فقط وحياة (ب) و (جـ)

∴ ح (أ و ب و جـ) = ح (أ) × ح (ب) × ح (جـ)

= (١-٠,٨) × ٠,٧ × ٠,٦

= ٠,٢ × ٠,٧ × ٠,٦

= ٠,٠٨٤

مثال (١١)

ثلاثة صناديق الأول به ٣٠ كرة حمراء، ٢٠ كرة بيضاء، ٥٠ كرة صفراء.

والثانى به ٢٥ كرة حمراء، ٣٠ كرة بيضاء، ٤٥ كرة صفراء.

والثالث به ٤٠ كرة حمراء، ٢٠ كرة بيضاء، ٤٠ كرة صفراء.

فإذا تم سحب كرة واحدة من كل صندوق بطريقة عشوائية.

إحسب إحتمال أن تكون الكرات الثلاث حمراء اللون.

الحل :

٣٠ ح	٢٥ ح	٤٠ ح
٢٠ ب	٣٠ ب	٢٠ ب
٥٠ ص	٤٥ ص	٤٠ ص
١٠٠ كرة	١٠٠ كرة	١٠٠ كرة

إحتمال أن تكون الكرات الثلاث حمراء.

وهذا يعنى إحتمال سحب كرة حمراء من الصندوق الأول وسحب كرة حمراء من

الصندوق الثانى وسحب كرة حمراء من الصندوق الثالث.

فإذا رمزنا لإحتمالات السحب من الصندوق الأول والثانى والثالث على الترتيب بالرمز $أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$ فإن

ح ($أ_١$ و $أ_٢$ و $أ_٣$) = ح ($أ_١$) × ح ($أ_٢$) × ح ($أ_٣$)

$$= \frac{٣٠}{١٠٠} \times \frac{٢٥}{١٠٠} \times \frac{٤٠}{١٠٠}$$

= ٠,٣ × ٠,٢٥ × ٠,٤

= ٠,٠٣

مثال (١٢)

فى أحد المصانع ثلاثة مخازن بكل منها عدد من السلع الممتازة والجيدة والرديئة على النحو التالى :-

المخزن الأول به	٨٠٠ سلعة ممتازة	١٥٠، سلعة جيدة	٥٠ ، سلعة رديئة
المخزن الثانى به	٧٠٠ سلعة ممتازة	٢٠٠، سلعة جيدة	١٠٠، سلعة رديئة
المخزن الثالث به	٦٠٠ سلعة ممتازة	١٠٠، سلعة جيدة	٣٠٠، سلعة رديئة

فإذا تم سحب سلعة واحدة عشوائياً من كل مخزن فما هو إحتمال.

١- أن تكون جميع السلع المسحوبة ممتازة.

٢- أن تكون جميع السلع المسحوبة جيدة.

٣- أن تكون جميع السلعة المسحوبة رديئة.

الحل :

المخزن / حالة السلعة	المخزن الأول	المخزن الثانى	المخزن الثالث
ممتازة	٨٠٠	٧٠٠	٦٠٠
جيدة	١٥٠	٢٠٠	١٠٠
رديئة	٥٠	١٠٠	٣٠٠
المجموع	١٠٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠

١- إحتمال أن تكون جميع السلع المسحوبة ممتازة :-

وهذا يعنى إحتمال أن تكون السلعة المسحوبة ممتازة من المخزن الأول وممتازة من المخزن الثانى وممتازة من المخزن الثالث ويفرض أن إحتمال أن تكون السلعة المسحوبة ممتازة من المخزن الأول والثانى والثالث.

سوف نرمز لها على الترتيب بالرمز $أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$

$$ح (أ_١ و أ_٢ و أ_٣) = ح (أ_١) \times ح (أ_٢) \times ح (أ_٣)$$

$$= \frac{٨٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٧٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٦٠٠}{١٠٠٠}$$

$$= ٠,٨ \times ٠,٧ \times ٠,٦$$

$$= ٠,٣٣٦$$

٢- إحتمال أن تكون جميع السلع المسحوبة جيدة :-

هذا يعنى إحتمال أن تكون السلعة المسحوبة جيدة من المخزن الأول والثانى والثالث.

$$ح (أ_١ و أ_٢ و أ_٣) = ح (أ_١) \times ح (أ_٢) \times ح (أ_٣)$$

$$= \frac{١٥٠}{١٠٠٠} \times \frac{٢٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{١٠٠}{١٠٠٠}$$

$$= ٠,١٥ \times ٠,٢ \times ٠,١$$

$$= ٠,٠٠٣٠$$

٣- إحتمال أن تكون جميع السلع المسحوبة رديئة :-

هذا يعنى إحتمال أن تكون السلعة المسحوبة رديئة من المخزن الأول والثانى والثالث.

$$ح (أ_١ و أ_٢ و أ_٣) = ح (أ_١) \times ح (أ_٢) \times ح (أ_٣)$$

$$= \frac{٥٠}{١٠٠٠} \times \frac{١٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٣٠٠}{١٠٠٠}$$

$$= ٠,٠٥ \times ٠,١ \times ٠,٣$$

$$= ٠,٠٠١٥$$

٣/١/٦ قاعدة الجمع والضرب معاً :-

تستخدم قاعدتى الجمع والضرب فى نفس الوقت فى حالة الحوادث المانعة والحوادث المستقلة أو غير المستقلة معاً. والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال (١٤)

ثلاثة أشخاص أ، ب، جـ فإذا كان إحتمال بقائهم على قيد الحياة فى نهاية سنة على الترتيب ٠,٨، ٠,٧، ٠,٦ .

إحسب الإحتمالات الآتية :-

١- إحتمال حياة (أ) فقط حتى نهاية السنة.

٢- إحتمال حياة واحد فقط حتى نهاية السنة.

٣- إحتمال حياة واحد على الأقل حتى نهاية السنة.

٤- إحتمال وفاة واحد على الأكثر خلال السنة.

الحل :

أ- إحتمال حياة (أ) فقط حتى نهاية السنة.

وهذا يعنى إحتمال حياة (أ) ووفاة (ب) و (جـ)

= ٠,٨ × ٠,٣ × ٠,٤

= ٠,٠٩٦

٢- إحتمال حياة واحد فقط حتى نهاية السنة.

فى هذه الحالة لا يوجد تخصيص للشخص الذى يبقى على قيد الحياة لذلك لابد من تحديد كافة الإحتمالات الممكنة.

= حياة (أ) ووفاه (ب) و (جـ) أو حياة (ب) ووفاه (أ) و (جـ) أو حياة (جـ) ووفاه (أ) و (ب)

= ٠,٨ × ٠,٣ × ٠,٤ + ٠,٧ ×٠,٢ × ٠,٤ + ٠,٦ × ٠,٢ × ٠,٣

= ٠,٠٩٦ + ٠,٠٥٦ + ٠,٠٣٦

= ٠,١٨٨

٣- إحتمال حياة واحد على الأقل حتى نهاية السنة.

وهذا يعنى إحتمال حياة واحد فقط أو أثنين فقط أو حياة الثلاثة

وهنا يتمثل الاحتمال المطلوب فى حاصل جمع الثلاث إحتمالات السابقة.

أ- إحتمال حياة واحد فقط :-

= حياة (أ) ووفاه (ب) و (جـ) أو حياة (ب) ووفاه (أ) و (جـ) أو حياة (جـ) ووفاه (أ) و (ب)

= ٠,٨ × ٠,٣ × ٠,٤ + ٠,٧ ×٠,٢ × ٠,٤ + ٠,٦ × ٠,٢ × ٠,٣

= ٠,٠٩٦ + ٠,٠٥٦ + ٠,٠٣٦

= ٠,١٨٨

ب- إحتمال حياة إثنين فقط :-

= حياة (أ) و (ب) ووفاه (جـ) أو حياة (أ) و (جـ) ووفاه (ب) أو حياة (ب) و (جـ) ووفاه (أ)

= ٠,٨ × ٠,٧ × ٠,٤ + ٠,٨ ×٠,٦ × ٠,٣ + ٠,٧ × ٠,٦ × ٠,٢

= ٠,٢٢٤ + ٠,١٤٤ + ٠,٠٨٤

= ٠,٤٥٢

جـ- إحتمال حياة الثلاثة معاً :-

= حياة (أ) و (ب) و(جـ)

= ٠,٨ × ٠,٧ × ٠,٦

= ٠,٣٣٦

∴ إحتمال حياة واحد على الأقل = ٠,١٨٨ + ٠,٤٥٢ + ٠,٣٣٦

= ٠,٩٧٦

حل أخر : (بإستخدام قانون تحقق حادث على الأقل من ثلاث حوادث)

إحتمال حياة واحد على الأقل حتى نهاية السنة

ح (أ١ + أ٢+ أ٣) = ح (أ١) + ح (أ٢) + ح (أ٣)

- [ح (أ١ أ٢) + ح (أ١ أ٣) +ح (أ٢ أ٣)] + ح (أ١ أ٢ أ٣)

= ٠,٨+٠,٧+٠,٦

– [(٠,٨×٠,٧) (٠,٨×٠,٦)+ (٠,٧×٠,٦)]

+ (٠,٨×٠,٧×٠,٦)

= (٢,١) – [٠,٥٦ + ٠,٤٨ + ٠,٤٢] + ٠,٣٦٦

= ٢,١ – ١,٤٦ + ٠,٣٣٦

= ٠,٩٧٦

حل أخر :

بإستخدام قانون الإحتمال العكسى :-

= ١ - إحتمال وفاة الثلاثة

= ١ - (٠,٢ × ٠,٣ × ٠,٤)

= ١ – ٠,٠٢٤

= ٠,٩٧٦

٤- إحتمال وفاه واحد على الأكثر خلال السنة.

وهذا يعنى إحتمال وفاة واحد فقط أو عدم وفاه أى واحد منهم ويتمثل الإحتمال المطلوب فى حاصل جمع النتيجتين.

أ- إحتمال وفاة واحد فقط :-

= وفاه (أ) وحياة (ب) و (جـ) أو وفاه (ب) وحياة (أ) و (جـ) أو وفاه (جـ) وحياه (أ) و (ب)

= ٠,٢ × ٠,٧ × ٠,٦ + ٠,٦ × ٠,٨× ٠,٣ + ٠,٤ × ٠,٨ × ٠,٧

= ٠,٠٨٤ + ٠,١٤٤ + ٠,٢٢٤

= ٠,٤٥٢

ب- إحتمال عدم وفاه أى واحد منهم :-

= حياة (أ) و (ب) و (جـ)

= ٠,٨ ×٠,٧ × ٠,٦

= ٠,٣٣٦

∴ إحتمال وفاه واحد على الأكثر خلال السنة = ٠,٤٥٢ + ٠,٣٣٦

= ٠,٧٨٨

٤/١/٦ قاعدة الحوادث المرتبطة أو المشروطة (الاحتمال الشرطى)

Conditional and Joint events

إذا كان لدينا الحادثان ($أ_١$)، ($أ_٢$) الغير مستقلان أو حادثان مرتبطان بمعنى أن تحقق الحادث الأول ($أ_١$) يؤثر بالتبعية على تحقق الحادث الثانى ($أ_٢$) أو يقع الحادث ($أ_٢$) بشرط وقوع الحادث ($أ_١$) أولاً. وهى يرمز لها بالرمز ح ($أ_٢$ / $أ_١$) ويعنى هذا الرمز إحتمال الحادث ($أ_٢$) بشرط تحقق الحادث ($أ_١$) وعلى ذلك يمكن القول أن :

$$ح (أ_١، أ_٢) = ح (أ_١) \times ح (أ_٢/ أ_١)$$

حيث أن :

ح ($أ_١$، $أ_٢$) هو إحتمال تحقق الحادثان $أ_١$، $أ_٢$ الغير مستقلان أو المرتبطان معاً.

ح ($أ_١$) هو إحتمال تحقق الحادث الأول.

ح ($أ_١$ / $أ_٢$) هو إحتمال تحقق الحادث الثانى بشرط تحقق الحادث الأول

ويمكن تعميم القاعدة السابقة كما يلى :-

إذا كان لدينا الحوداث الغير مستقلة أو المرتبطة بالترتيب $أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$ ..... $أ_ن$

فإن :-

ح ($أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$، ..... $أ_ن$) = ح ($أ_١$)×ح ($أ_٢$/$أ_١$) ×ح ($أ_٣$/$أ_٢$/$أ_١$)

× ..... × ح ($أ_ن$ / $أ_{ن-١}$ / $أ_{ن-٢}$ / $أ_١$)

٥/١/٦ قواعد بييز للتقسيم : Bayess Rules

١/٥/١/٦ القاعدة الأولى :

إذا كان لدينا عدة حوادث مانعة أو متنافية على الترتيب $أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$، ..... $أ_ن$ وكان الحدث (ب) يمكن أن يقع مع أحد الحوادث المتنافية السابقة فإن :

إحتمال تحقق الحدث مع أحد الحوادث المانعة = $\sum_{ر=١}^{ر=ن}$ ح (أر، ب)

حيث :-

$$\sum_{ر=٠}^{ر=ن} ح(أ_ر، ب) = ح(أ_١، ب) + ح(أ_٢، ب) + ح(أ_٣، ب) + ... + ح(أ_ن، ب)$$

حيث :-

$$ح(أ_١، ب) = ح(أ_١) + ح(ب/أ_١)$$

$$ح(أ_٢، ب) = ح(أ_٢) + ح(ب/أ_٢)$$

$$\vdots$$

$$ح(أ_ن، ب) = ح(أ_ن) + ح(ب/أ_ن)$$

٦/١/٥/٢ القاعدة الثانية :

إذا كان لدينا عدة حوادث مانعة أو متنافية على الترتيب $أ_١، أ_٢، أ_٣، .....$ $أ_ن$ وكان الحدث (ب) يمكن أن يقع مع أحد الخوادث المتنافية السابقة فإن :

إحتمال تحقق الحدث (ب) مع حدث معين من الأحداث المانعة السابقة وليكن الحدث ر.

$$= \frac{ح(أ_ر، ب)}{\sum_{ر=١}^{ر=ن} ح(أ_ر، ب)}$$

مثال (١٥):

فى إحدى المصانع ثلاث مخازن يحتوى المخزن الأول على ٨٠ سلعة ممتازة، ٢٠ سلعة جيدة، المخزن الثانى يحتوى على ٩٠ سلعة ممتازة، ١٠ سلعة جيدة، المخزن الثالث يحتوى على ٧٠ سلعة ممتازة، ٣٠ سلعة جيدة فإذا أخترنا أحد المخازن بطريقة

عشوائية وسحبنا منه سلعة واحدة إحسب إحتمال أن تكون هذه السلعة ممتازة . وبفرض أننا إخترنا أحد المصانع بطريقة عشوائية وسحبنا منه سلعة واحدة فوجدت أنها ممتازة فما هو إحتمال أن تكون هذه السلعة من المخزن الثانى.

الحل :

١- إحتمال أن تكون هذه السلعة ممتازة :-

نفرض أن حدث إختيار المخزن الأول = $أ_١$

وحدث إختيار المخزن الثانى = $أ_٢$

وحدث إختيار المخزن الثالث = $أ_٣$

وحدث سحب سلعة ممتازة = ب

∴ الإحتمال $= ح(أ_١، ب) + ح(أ_٢، ب) + ح(أ_٣، ب)$

$$= ح(أ_١) \times ح(ب/أ_١) + ح(أ_٢) \times ح(ب/أ_٢) + ح(أ_٣) \times ح(ب/أ_٣)$$

$$= \left(\frac{١}{٣} \times \frac{٨٠}{١٠٠} + \frac{١}{٣}\right) \times \left(\frac{٩٠}{١٠٠} + \frac{١}{٣} \times \frac{٧٠}{١٠٠}\right)$$

$$= \frac{١}{٣}(٠,٨ + ٠,٩ + ٠,٧)$$

$$= \frac{١}{٣} \times ٢,٤$$

$$= ٠,٨$$

٢- بفرض أننا إخترنا أحد المخازن بطريقة عشوائية وسحبنا منه سلعة واحدة فوجدت أنها ممتازة فما هو إحتمال أن تكون هذه السلعة من المخزن الثانى.

$$\text{الاحتمال} = \frac{\text{ح (أ}_{١}\text{، ب)}}{\text{ح (أ}_{١}\text{، ب)} + \text{ح (أ}_{٢}\text{، ب)} + \text{ح (أ}_{٣}\text{، ب)}}$$

$$\text{الاحتمال} = \frac{\text{ح (أ}_{١}\text{، ب)}}{\text{ح (أ}_{١}\text{، ب)} + \text{ح (أ}_{٢}\text{، ب)} + \text{ح (أ}_{٣}\text{، ب)}}$$

$$= \frac{\frac{١}{٣} \times ٠,٩}{\frac{١}{٣}(٠,٧ + ٠,٩ + ٠,٨)}$$

$$= \frac{٠,٩}{٢,٤} = ٠,٣٧٥$$

مثال (١٦):

أربعة صناديق متماثلة فى الشكل الأول به ٣٠ كرة حمراء، ٤٠ كرة بيضاء، ٣٠ كرة صفراء والثانى به ٥٠ كرة حمراء، ٢٠ كرة بيضاء، ٣٠ كرة صفراء، والثالث به ١٠ كرات حمراء، ٤٠ كرة بيضاء، ٥٠ كرة صفراء والرابع به ٦٠ كرة حمراء، ٣٠ كرة بيضاء، ١٠ كرة صفراء، فإذا إخترنا صندوق واحد عشوائياً وسحبنا منه كرة واحدة. إحسب إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء اللون. وبفرض أننا أخترنا صندوق واحد عشوائياً وسحبنا منه كرة واحدة فوجدت صفراء اللون. إحسب إحتمال أن تكون هذه الكرة من الصندوق الثالث.

الحل :

٣٠ ح	٥٠ ح	١٠ ح	٦٠ ح
٤٠ ب	٢٠ ب	٤٠ ب	٣٠ ب
٣٠ ص	٣٠ ص	٥٠ ص	١٠ ص
١٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠

١- إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء اللون :-

بفرض أن حدث إختيار الصندوق الأول = $أ_{١}$

وحدث إختيار الصندوق الثانى = $أ_{٢}$

وحدث إختيار الصندوق الثالث = $أ_{٣}$

وحدث إختيار الصندوق الرابع = $أ_{٤}$

بفرض أن حدث سحب كرة بيضاء = ب

∴ الإحتمال = ح ($أ_{١}$، ب) + ح ($أ_{٢}$، ب) + ح ($أ_{٣}$،ب) + ح ($أ_{٤}$،ب)

= ح ($أ_{١}$) × ح (ب/$أ_{١}$) + ح ($أ_{٢}$) × ح(ب/$أ_{٢}$)

+ ح ($أ_{٣}$) × ح (ب/$أ_{٣}$) + ح ($أ_{٤}$) × ح (ب/$أ_{٤}$)

$$= \frac{١}{٤} \times \frac{٤٠}{١٠٠} + \frac{١}{٤} \times \frac{٢٠}{١٠٠} + \frac{١}{٤} \times \frac{٤٠}{١٠٠} + \frac{١}{٤} \times \frac{٣٠}{١٠٠}$$

$$= \frac{١}{٤}(٠,٤ + ٠,٢ + ٠,٤ + ٠,٣)$$

$$= \frac{١}{٤} \times ١,٣$$

= ٣٢٥.

٢- بفرض أننا إخترنا صندوق واحد عشوائياً وسحبنا منه كرة فوجدت أنها صفراء اللون إحسب أن تكون هذه الكرة من الصندوق الثالث.

بفرض أن حدث سحب كرة صفراء = هـ

$$\text{الاحتمال} = \frac{\text{ح}(\text{أ}_1، \text{هـ})}{\text{ح}(\text{أ}_1، \text{هـ}) + \text{ح}(\text{أ}_2، \text{هـ}) + \text{ح}(\text{أ}_3، \text{هـ}) + \text{ح}(\text{أ}_4، \text{هـ})}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{50}{100}}{\frac{1}{4} \times \frac{30}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{30}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{50}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{10}{100}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times 0,5}{\frac{1}{4}(0,3 + 0,3 + 0,5 + 0,1)}$$

$$= \frac{0,5}{1,2} = 0,4$$

الوحدة الدراسية الثانية

توزيع ثنائى الحدين فى الإحتمالات

يعتبر توزيع ثنائى الحدين من التوزيعات الإحتمالية التى يكثر إستخدامها فى نظرية الإحتمالات ويستخدم هذا التوزيع متى توافرت الشروط الآتية :-

أ- أن تكون بصدد تجربة ما وتتم هذه التجربة بعدد كبير من المرات المتكررة وتكون كل مرة مستقلة عن نظيرتها.

ب- كل نتيجة لأى محاولة لها حالتين فقط لا ثالث لهما إما تحقيق النجاح أو تحقيق الفشل.

جـ- ثبات قيم إجمالى النجاح والفشل لأى محاولة.

ويعتبر توزيع ثنائى الحدين مناسب ومقبول طالما توافرت كافة هذه الشروط فى أى تجربة.

وإذا فرضنا أن إحتمال النجاح = أ

وأن إحتمال الفشل = س

حيث أ + س = ١

وإذا تذكرنا مفكوك ذات الحدين بأس صحيح موجب وفقاً للمقدار ذو الحدين التالى.

$$(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_1\, \text{أ}\, \text{س}^{\text{ن}-1} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_2\, \text{أ}^2\, \text{س}^{\text{ن}-2} + \dots\dots\dots$$

$$+ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\, \text{أ}^{\text{ر}}\, \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\, \text{أ}^{\text{ن}}$$

حيث :-

ر = عدد مرات حدوث الحادث من بين عدد مرات إجراء التجربة.

ن = عدد الحالات الكلية أو هو مدى المتغير العشوائى فى توزيع ذو الحدين أو عدد مرات إجراء التجربة.

وللحصول على دالة إحتمال توزيع ثنائى الحدين نعتمد على المعادلة الآتية :

دالة إحتمال توزيع ثنائى الحدين = $^{ن}ق_{ر}\ أ^{ر}\ (١-أ)^{ن-ر}$

أ = $^{ن}ق_{ر}\ أ^{ر}\ س^{ن-ر}$

حيث ر = [٠، ١، ٢، ٣، ..... ن]

ويعتبر توزيع ثنائى الحدين مناسب ومقبول طالما كانت ن محدودة حيث تمثل ن عدد محاولات التجربة أما إذا كانت ن كبيرة بدرجة كافية فإن توزيع ثنائى الحدين يعتبر غير مناسب ويستخدم بدلاً منه توزيعات أخرى مثل توزيع بواسون.

والأمثلة التالية توضح كيفية حساب كافة الاحتمالات الممكنة والناتجة من إجراء تجربة معينة فى شكل جدول يسمى بجدول توزيع ثنائى الحدين والذى سوف نستخدمه فى حساب القيمة المتوقعة أو القيمة المتوسطة للمتغير العشوائى.

مثال ١ :-

إذا كان إحتمال إنتاج السلعة الجيدة بأحد المصانع هو ٠,٦ وقد سحبت عشوائياً ١٠٠٠ عينة من إنتاج هذا المصنع . وكل عينة مكونة من ثلاث سلع.

أوجد توزيع ثنائى الحدين لهذه العينات.

الحل :-

يقصد بتوزيع ثنائى الحدين فى هذا المثال هو توزيع الألف عينة وفقاً لعدد السلع الجيدة فى العينة فقد تكون هناك عينات لا يوجد بها أى سلعة جيدة وعينات أخرى يوجد بها سلعة واحدة جيدة. وعينات أخرى بها سلعتين جيدتين. وعينات أخرى يوجد بها ثلاث سلع جيدة.

وحيث أن إحتمال إنتاج السلعة الجيدة = ٠,٦ (وهذا هو الاحتمال المطلوب) وأن الإحتمال العكسى وهو إحتمال إنتاج السلعة الرديئة (١-٠,٦ = ٠,٤).

وللحصول على توزيع ثنائى الحدين للعينات المسحوبة لابد من إيجاد حدود مفكوك نظرية ذات الحدين للمقدار $(٠,٦+٠,٤)^{٣}$ والحدود المختلفة تمثل الإحتمالات الآتية :

ح (٠) إحتمال ألا توجد أى سلعة جيدة من بين الثلاث سلع.

ح (١) إحتمال أن توجد سلعة جيدة من بين الثلاث سلع.

ح (٢) إحتمال أن توجد أى سلعتين جيدتين من بين الثلاث سلع.

ح (٣) إحتمال أن توجد ثلاث سلع جيدة من بين الثلاث سلع.

وعلى أساس هذه الإحتمالات يمكن تحديد عدد العينات وفقاً لعدد السلع الجيدة وذلك على النحو التالى :-

عدد السلع الجيدة	الإحتمال ح (ر)	عدد العينات
٠	ح (٠) = $^{٣}ق_{٠}$ (٠,٦)^{٠} (٠,٤)^{٣}=٠,٠٦٤ × ١٠٠٠	٦٤
١	ح (١) = $^{٣}ق_{١}$ (٠,٦)^{١} (٠,٤)^{٢}=٠,٢٨٨ × ١٠٠٠	٢٨٨
٢	ح (٢) = $^{٣}ق_{٢}$ (٠,٦)^{٢} (٠,٤)^{١}=٠,٤٣٢ × ١٠٠٠	٤٣٢
٣	ح (٣) = $^{٣}ق_{٣}$ (٠,٦)^{٣} (٠,٤)^{٠}=٠,٢١٦ × ١٠٠٠	٢١٦
	المجموع = ١,٠٠٠	١٠٠٠

مثال ٢ :-

إذا كان إحتمال إنتاج سلعة جيدة بأحد المصانع يتحدد من خلال إحصائية يقضى بأنه من بين كل ١٠٠٠ وحدة منتجة من هذه السلعة توجد ٨٠٠ وحدة فقط جيدة والباقى غير مطابق للمواصفات فإذا تم سحب ١٠٠٠ عينة من إنتاج هذه السلعة فى هذا المصنع وكل عينة مكونة من ٤ سلع أوجد توزيع ثنائى الحدين لهذه العينات. من هذا الجدول أوجد الإحتمالات الآتية :-

١- إحتمال أن تكون جميع السلع جيدة.

٢- إحتمال أن تكون جميع السلع رديئة.

٣- إحتمال أن تكون سلعتين على الأقل جيدة.

٤- إحتمال أن تكون أكثر من سلعتين جيدة.

٥- إحتمال أن تكون أقل من سلعتين جيدة.

٦- إحتمال أن تكون سلعتين على الأكثر جيدة.

٧- إحتمال أن تكون ٣ سلع على الأقل رديئة.

٨- إحتمال أن تكون ٣ سلع على الأكثر ردينة.

٩- إحتمال أن تكون أقل من ٣ سلع ردينة.

١٠- إحتمال أن تكون أكثر من ٣ سلع ردينة.

١١- إحتمال أن تكون سلعة واحدة فقط ردينة.

الحل :-

إحتمال إنتاج سلعة جيدة = $\frac{\text{عدد السلع الجيدة}}{\text{عدد السلع جميعها}}$

$= \frac{٨٠٠}{١٠٠٠} = ٠,٨$

∴ أ = ٠,٨

ومنها س (إحتمال إنتاج السلعة الردينة) = ١ ـ ٠,٨ = ٠,٢

ويتحدد مفكوك توزيع ثنائى الحدين بمفكوك $(س+أ)^{ن}$

$= (٠,٨+٠,٢)^{٤}$

وذلك على النحو التالى .

عدد السلع الجيدة (ر)	الإحتمال ح (ر)
٠	ح (٠) = $ق^{٤}_{٠}$ (٠,٨)^{٠} (٠,٢)^{٤} = ٠,٠٠١٦
١	ح (١) = $ق^{٤}_{١}$ (٠,٨)^{١} (٠,٢)^{٣} = ٠,٠٢٥٦
٢	ح (٢) = $ق^{٤}_{٢}$ (٠,٨)^{٢} (٠,٢)^{٢} = ٠,١٥٣٦
٣	ح (٣) = $ق^{٤}_{٣}$ (٠,٨)^{٣} (٠,٢)^{١} = ٠,٤٠٩٦
٤	ح (٤) = $ق^{٤}_{٤}$ (٠,٨)^{٤} (٠,٢)^{٠} = ٠,٤٠٩٦
	المجموع = ١,٠٠٠

١- إحتمال أن تكون جميع السلع جيدة = ح (٤) = ٠,٤٠٩٦

٢- إحتمال أن تكون جميع السلع ردينة = ح (٠) = ٠,٠٠١٦

٣- إحتمال أن تكون سلعتين على الأقل جيدة.

هذا الاحتمال يعنى إحتمال أن تكون ٢ جيدة أو ٣ جيدة أو ٤ جيدة.

= ح (٢) + ح (٣) + ح (٤)

= ٠,١٥٣٦ + ٠,٤٠٩٦ + ٠,٤٠٩٦

= ٠,٩٧٢٨

٤- إحتمال أن تكون أكثر من سلعتين جيدة.

هذا الاحتمال يعنى إحتمال أن تكون ٣ جيدة أو ٤ جيدة.

= ح (٣) + ح (٤)

= ٠,٤٠٩٦ + ٠,٤٠٩٦

= ٠,٨١٩٢

٥- إحتمال أن تكون أقل من سلعتين جيدة.

هذا الاحتمال يعنى إحتمال أن تكون سلعة واحدة جيدة أو عدم وجود أى سلعة جيدة .

= ح (١) + ح (٠)

= ٠,٠٢٥٦ + ٠,٠٠١٦

= ٠,٠٢٧٢

٦- إحتمال أن تكون سلعتين على الأكثر جيدة.

هذا الاحتمال يعنى إحتمال أن تكون سلعتين جيدة أو سلعة جيدة أو عدم وجود أى سلعة جيدة.

= ح (٢) + ح (١) + ح (٠)

= ٠,١٥٣٦ + ٠,٠٢٥٦ ٠,٠٠١٦

= ٠,١٨٠٨

٧- إحتمال أن تكون ٣ سلع على الأقل ردينة.

هذا الاحتمال يعنى إحتمال أن تكون ٣ سلع ردينة أو أربع سلع ردينة :-

= ح (١) + ح (٠)

= ٠,٠٢٥٦ + ٠,٠٠١٦

= ٠,٠٢٧٢

٨- إحتمال أن تكون ٣ سلع على الأكثر ردينة.

هذا الاحتمال يعنى إحتمال أن تكون ٣ سلع ردينة أو سلعتين ردينتين أو سلعة واحدة ردينة أو عدم وجود أى سلعة ردينة.

= ح (١) + ح (٢) + ح (٣) + ح (٤)

= ٠,٠٢٥٦ + ٠,١٥٣٦ + ٠,٤٠٩٦ + ٠,٤٠٩٦

= ٠,٩٩٨٤

أ، عن طريق قاعدة الإحتمال العكسى.

= ١ – إحتمال أن تكون جميع السلع ردينة.

= ١ – ٠,٠٠١٦

= ٠,٩٩٨٤

٩- إحتمال أن تكون أقل من ٣ سلع ردينة.

هذا الاحتمال يعنى إحتمال أن تكون سلعتين ردينتين أو سلعة ردينة أو عدم وجود أى سلعة ردينة.

= ح (٢) + ح (٣) + ح (٤)

= ٠,١٥٣٦ + ٠,٤٠٩٦ + ٠,٤٠٩٦

= ٠,٩٧٢٨

أ، عن طريق قاعدة الإحتمال العكسى.

= ١ – [ح (١) + ح (٠)].

= ١ – [٠,٠٢٥٦ + ٠,٠٠١٦]

= ١ – ٠,٠٢٧٢

= ٠,٩٧٢٨

١٠- إحتمال أن تكون أكثر من ٣ سلع ردينة.

هذا الاحتمال يعنى إحتمال أن تكون ٤ سلع ردينة

= ح (٠)

= ٠,٠٠١٦

١١- إحتمال أن تكون سلعة واحدة فقط ردينة.

هذا الاحتمال يعنى إحتمال أن تكون ٣ جيدة أو ٤ جيدة

= ح (٣)

= ٠,٤٠٩٦

ملخص الوحدة

بعد دراسة الوحدة الدراسية الأولى والثانية يجب أن يكون الدارس ملماً بالآتى :

١- الإحتمال هو عبارة عن كسر أكبر من الصفر وأقل من الواحد الصحيح ويساوى عدد الحالات التى تحقق الاحتمال على عدد الحالات الكلية.

٢- الإحتمال + الاحتمال العكسى = ١

∴ الاحتمال = ١ ــ العكس

العكس = ١ - الاحتمال

٣- فى جميع مسائل الاحتمالات

الرمز و يحول إلى ⟵ ×

الرمز أو يحول إلى ⟵ +

٤- مفكوك المقدار الآتى : $(٠,١+٠,٩)^{٣}$

$= {}^{٣}ق_{٠} \ (٠,٩)^{٠} \ (٠,١)^{٣} = ٠,٠٠١$

$+ {}^{٣}ق_{١} \ (٠,٩)^{١} \ (٠,١)^{٢} = ٠,٠٢٧$

$+ {}^{٣}ق_{٢} \ (٠,٩)^{٢} \ (٠,١)^{١} = ٠,٢٤٣$

$+ {}^{٣}ق_{٣} \ (٠,٩)^{٣} \ (٠,١)^{٠} = ٠,٧٢٩$

١,٠٠٠

أسئلة الوحدة

السؤال الأول

شخصان أ، ب فإذا كان إحتمال بقاء الأول على قيد الحياة لمدة سنة واحدة هو ٠,٩ وإحتمال بقاء الثانى هو ٠,٨ أوجد الإحتمالات الآتية :

١- إحتمال حياة الأثنين معاً.

٢- إحتمال حياة أ فقط.

٣- إحتمال حياة واحد فقط منهما.

٤- إحتمال حياة واحد على الأقل منهما.

السؤال الثانى :

ثلاثة أشخاص أ، ب، جـ فإذا كان إحتمال حياة كل منهم على الترتيب لمدة سنة واحدة هو ٠,٩، ٠,٨، ٠,٧ أوجد الإحتمالات الآتية :

١- إحتمال حياة الثلاثة.

٢- إحتمال وفاة الثلاثة.

٣- إحتمال حياة أ فقط من الثلاثة.

٤- إحتمال حياة واحد فقط من الثلاثة.

٥- إحتمال حياة أ، ب فقط.

٦- إحتمال حياة أثنين فقط من الثلاثة.

٧- إحتمال حياة واحد على الأقل من الثلاثة.

السؤال الثالث :

إذا كان إحتمال إنتاج السلعة الجيدة بأحد المصانع هو ٠,٨ فإذا سحب ٤ سلع من إنتاج هذا المصنع . المطلوب :

أولا : تكوين جدول توزيع ثنائى الحدين بالنسبة لإحتمال إنتاج السلع الجيدة.

ثانياً : أوجد من الجدول السابق الاحتمالات الآتية :

١- إحتمال أن تكون جميع السلع جيدة

٢- إحتمال أن تكون جميع السلع رديئة.

نموذج أسئلة محلوله
على الوحدة الدراسية

أجب على السؤال التالى :

إذا كان إحتمال إنتاج السلعة الجيدة بأحد المصانع هو ٠,٨ فإذا سحب ٤ سلع من إنتاج هذا المصنع . المطلوب :

أولا : تكوين جدول توزيع ثنائى الحدين بالنسبة لإحتمال إنتاج السلع الجيدة.

ثانياً : أوجد من الجدول السابق الاحتمالات الآتية :

١- إحتمال أن تكون جميع السلع جيدة

٢- إحتمال أن تكون جميع السلع رديئة.

الإجابة

أولا : تكوين جدول توزيع ثنائى الحدين بالنسبة لإحتمال إنتاج السلع الجيدة.

عدد السلع الجيدة (ر)	الإحتمال ح (ر)
٠	ح (٠) = ^{٤}ق. (٠,٨)^{٠} (٠,٢)^{٤}=٠,٠٠١٦
١	ح (١) = ^{٤}ق$_{١}$ (٠,٨)^{١} (٠,٢)^{٣}=٠,٠٢٥٦
٢	ح (٢) = ^{٤}ق$_{٢}$ (٠,٨)^{٢} (٠,٢)^{٢}=٠,١٥٣٦
٣	ح (٣) = ^{٤}ق$_{٣}$ (٠,٨)^{٣} (٠,٢)^{١}=٠,٤٠٩٦
٤	ح (٤) = ^{٤}ق$_{٤}$ (٠,٨)^{٤} (٠,٢)^{٠}=٠,٤٠٩٦
	المجموع = ١,٠٠٠

ثانيا :

١- إحتمال أن تكون جميع السلع جيدة = ح (٤) = ٠,٤٠٩٦

٢- إحتمال أن تكون جميع السلع رديئة = ح (٠) = ٠,٠٠١٦

الوحدة الدراسية الثالثة
التطبيقات التجارية الخاصة بالإحتمالات

المبحث الأول
استخدام توزيع ثنائى الحدين
فى مراقبة جودة المشروعات الصغيرة

من المعلوم أنه فى أى مشروع صناعى لابد من وجود وحدات غير مطابقة للمواصفات بنسبة مسموح بها فى أى صناعة من الصناعات فإذا زادت هذه النسبة عن النسبة المسموح بها فإن ذلك يرجع إلى وجود عامل أو أكثر من العوامل التى تسببت فى زيادة هذه النسبة عن المسموح بها مثل :-

وجود خلل فى الآلات – أو عدم مطابقة المادة الأولية للشروط المطلوبة – أو قلة كفاءة المشتغلين بالمصنع – أو سوء التنظيم الداخلى للمصنع.

لهذا أمكن إستخدام أداه من الأدوات الرياضية التى تستخدم فى إطار نظرية الإحتمالات فى مراقبة الإنتاج والجودة فى المشروعات الصناعية والحكم على مدى سلامة الإنتاج من عدمه وذلك عن طريق إتباع الأسلوبين التاليين :-

أولاً :- مقارنة الإحتمال النظرى لإنتاج السلع الجيدة بالإحتمال الفعلى.

ثانياً :- مقارنة توزيع العينات من واقع الإختبار الفعلى بتوزيع العينات من واقع الإختبار النظرى.

والأمثلة التالية توضح كيفية الحكم على مدى سلامة الإنتاج.

مثال (١) :

قامت إحدى الشركات الصناعية بإختبار ٣٢٠ من قطع غيار الثلاجات التى ينتجها أحد مصانعها وكانت كل عينة مكونة من ٤ قطع غيار وقد تبين للشركة أن توزيع هذه العينات وفقاً لعدد قطع الغيار الجيدة هو.

عدد قطع الغيار الجيدة	عدد العينات
٠	٢
١	١٠
٢	٤٨
٣	١٣٠
٤	١٣٠
المجموع الكلى	٣٢٠

والمطلوب تحديد مدى سلامة الإنتاج بهذا المصنع إذا كان الإحتمال النظرى لإنتاج قطعة الغيار الجيدة هو ٠,٨.

الحل :-

يمكن الحكم على مدى سلامة الإنتاج. عن طريقة مقارنة الإحتمال النظرى النعطى فى التمرين لإنتاج قطعة الغيار الجيدة وهو ٠,٨ بالإحتمال الفعلى المستنتج من التمرين. أو عن طريق مقارنة توزيع العينات وفقاً للإختبار الفعلى المعطى فى التمرين بتوزيع العينات وفقاً للإختبار النظرى المستنتج من التمرين.

أولاً : مقارنة الإحتمال النظرى لإنتاج قطعة الغيار الجيدة المعطى فى التمرين بالإحتمال الفعلى المستنتج من التمرين. ويتم تحديد الإحتمال الفعلى كالآتى :-

عدد قطع الغيار الجيدة	عدد العينات	عدد قطع الغيار × عدد العينات
٠	٢	صفر
١	١٠	١٠
٢	٤٨	٩٦
٣	١٣٠	٣٩٠
٤	١٣٠	٥٢٠
المجموع الكلى	٣٢٠	١٠١٦

$$\text{المتوسط } م = \frac{١٠١٦}{٣٢٠} = ٣,١٧٥$$

$$\text{الإحتمال} = \frac{م}{ن} = \frac{٣,١٧٥}{٤} = ٠,٧٩٤$$

الإحتمال النظرى	٠,٨٠٠
الإحتمال الفعلى	٠,٧٩٤
الفرق	٠,٠٠٦

يلاحظ أن الإحتمال النظرى قريب جداً من الإحتمال الفعلى والفرق بينهما ضئيل جداً. مما يعتبر دليلاً قاطعا على سلامة الإنتاج بهذا المصنع وعدم وجود أى نقص فى العوامل التى تؤثر فى سلامة الإنتاج.

ثانياً : مقارنة توزيع العينات من واقع الإختبار الفعلى المعطى فى التمرين بتوزيع العينات من واقع الإختبار النظرى المستنتج من التمرين.

ويتحدد التوزيع النظرى كالآتى :-

∵ الإحتمال النظرى لإنتاج السلعة الجيدة = ٠,٨

∵ الإحتمال النظرى لإنتاج السلعة الردينة = ٠,٢

ويتحدد التوزيع النظرى على أساس مفكوك نظرية ذات الحدين للمقدار $(٠,٨+٠,٢)^{٤}$ حيث يكون لدينا.

ر	الاحتمال ح ر	عدد العينات
٠	$ق_{٠}^{٤}$ $(٠,٨)^{٠}$ $(٠,٢)^{٤}$ = ٣٢٠×٠,٠٠١٦	١
١	$ق_{١}^{٤}$ $(٠,٨)^{١}$ $(٠,٢)^{٣}$ = ٣٢٠×٠,٠٢٥٦	٨
٢	$ق_{٢}^{٤}$ $(٠,٨)^{٢}$ $(٠,٢)^{٢}$ = ٣٢٠×٠,١٥٣٦	٤٩
٣	$ق_{٣}^{٤}$ $(٠,٨)^{٣}$ $(٠,٢)^{١}$ = ٣٢٠×٠,٤٠٩٦	١٣١
٤	$ق_{٤}^{٤}$ $(٠,٨)^{٣}$ $(٠,٢)^{٠}$ = ٣٢٠×٠,٤٠٩٦	١٣١
مجـ	المجموع = ١,٠٠٠٠	٣٢٠

ثم يتم مقارنة التوزيع الفعلى للعينات بالتوزيع النظرى لها على النحو التالى .

مقارنة التوزيع الفعلى للعينات بالتوزيع النظرى

عدد قطع الغيار الجيدة	التوزيع الفعلى	التوزيع النظرى	الفرق
٠	٢	١	١+
١	١٠	٨	٢+
٢	٤٨	٤٩	١-
٣	١٣٠	١٣١	١-
٤	١٣٠	١٣١	١-
المجموع الكلى	٣٢٠	٣٢٠	

وبمقارنة التوزيع الفعلى والتوزيع النظرى يتبين أن التوزيع الفعلى يزيد عن التوزيع

النظرى فى عدد العينات التى يجب أن تكون فيها عدد قطع الغيار الجيدة بمقدار ٣ عينات بينما يقل عن التوزيع النظرى فى عدد العينات التى يكون فيها عدد قطع الغيار الجيدة ٢ أو ٣ أو ٤ بمقدار ٣ عينات. وحيث أن الفرق بين التوزيعين الفعلى والنظرى فروق ضئيلة فإنه يمكن إعتبار أن الإنتاج فى المصنع يسير طبقاً للمواصفات الموضوعة له.

مثال (٢) :

وفقاً للمواصفات الموضوعة للإنتاج بأحد المصانع الحربية تبين أن يكون من بين كل ١٠٠ رصاصة منتجة توجد ٧٠ رصاصة صالحة للإستخدام فإذا قام هذا المصنع بإختبار ١٠٠٠ عينة من إنتاجه وكل عينة مكونة من ٣ رصاصات وقد تبين له أن توزيع هذه العينات وفقاً لعدد الرصاصات الصالحة للإستخدام هو.

عدد الرصاصات الصالحة	عدد العينات
٠	١٢٠
١	٣٥٠
٢	٣٧٠
٣	١٦٠
المجموع الكلى	١٠٠٠

والمطلوب تحديد مدى سلامة الإنتاج بهذا المصنع بمقارنة :-

أ- الإحتمال النظرى بالإحتمال الفعلى.

ب- مقارنة توزيع العينات من واقع الإختبار الفعلى بتوزيع العينات من واقع الإختبار النظرى.

الحل :-

أ- مقارنة الإحتمال النظرى بالإحتمال الفعلى.

ويتحدد الإحتمال الفعلى لإنتاج الرصاصة الجيدة كما يلى :-

عدد الرصاصات الصالحة	عدد العينات	عدد الرصاصات الصالحة × عدد العينات
٠	١٢٠	٠
١	٣٥٠	٣٥٠
٢	٣٧٠	٧٤٠
٣	١٦٠	٤٨٠
المجموع الكلى	٣٢٠	١٥٧٠

$$\text{المتوسط } م = \frac{١٥٧٠}{١٠٠٠} = ١,٥٧$$

$$\text{الإحتمال} = \frac{م}{ن} = \frac{١,٥٧}{٣} = ٠,٥٢٣$$

وهذا يمثل الإحتمال الفعلى = ٠,٥٢٣

$$\text{أما الاحتمال النظرى} = \frac{٧٠}{١٠٠} = ٠,٧٠٠$$

الإحتمال النظرى	٠,٧٠٠
الإحتمال الفعلى	٠,٥٢٣
الفرق	٠,١٧٧

وبمقارنة الإحتمال النظرى بالإحتمال الفعلى نجد أن هناك فرقاً كبيراً بين الاحتمالين مما يعد دليلاً على وجود خلل بالعملية الإنتاجية الأمر الذى يترتب عليه. أنه يمكن القول أن هذا المصنع لا يسير طبقاً للمواصفات الموضوعة.

ب- مقارنة توزيع العينات من واقع الإختبار الفعلى بتوزيع العينات من واقع الإختبار النظرى لها :

يتحدد التوزيع النظرى على أساس مفكوك نظرية الحدين للمقدار $(٠,٧+٠,٣)^{٣}$ وذلك كما يلى :-

ر	الاحتمال ح ر	عدد العينات
٠	$^{٣}ق_{٠}$ $(٠,٧)^{٠}$ $(٠,٣)^{٣}$ = ١٠٠٠×٠,٠٢٧	٢٧
١	$^{٣}ق_{١}$ $(٠,٧)^{١}$ $(٠,٣)^{٢}$ = ١٠٠٠×٠,١٨٩	١٨٩
٢	$^{٣}ق_{٢}$ $(٠,٧)^{٢}$ $(٠,٣)^{١}$ = ١٠٠٠×٠,٤٤١	٤٤١
٣	$^{٣}ق_{٣}$ $(٠,٧)^{٣}$ $(٠,٣)^{٠}$ = ١٠٠٠×٠,٣٤٣	٣٤٣
مجـ	المجموع = ١,٠٠٠٠	١٠٠٠

مقارنة التوزيع الفعلى للعينات بالتوزيع النظرى

عدد الرصاصات الصالحة	التوزيع الفعلى	التوزيع النظرى	عدد العينات
٠	١٢٠	٢٧	٩٣+
١	٣٥٠	١٨٩	١٦١+
٢	٣٧٠	٤٤١	٧١-
٣	١٦٠	٣٤٣	١٨٣-
المجموع الكلى	١٠٠٠	١٠٠٠	

وبمقارنة التوزيع الفعلى والنظرى للعينات المسحوبة يتضح أن التوزيع الفعلى يزيد عن التوزيع النظرى فى عدد العينات التى يكون فيها عدد الرصاصات الصالحة للإستخدام. أو ١ فى حين أنه يقل عن التوزيع النظرى فى عدد العينات التى يكون فيها عدد الرصاصات الصالحة ٢ أو ٣ ومقدار هذا الفرق سواء بالزيادة أو النقصان هو ٢٥٤ وهذا الفرق يعد دليلاً على أن الإنتاج فى هذا المصنع لا يسير طبقاً للمواصفات الموضوعة.

المبحث الثانى

المنفعة المتوقعة وترشيد إتخاذ القرارات الإدارية

إن.أى شركة تجارية أو أى مشروع صناعى يهدف إلى تحقيق أكبر ربح بأقل تكلفة ممكنة وهذا يتوقف على إختيار الخطة المناسبة من مجموع الخطط المطروحة أمام هذه الشركة أو المشروع الصناعى. وكل خطة من هذه الخطط يصادف تنفيذها صور متعددة من حالات الطلب والتى تتغير بتغير الأحوال الإقتصادية من رواج أو كساد وأحياناً يكون الطلب على السلعة ردىء – أو أقل من المتوسط – أو معتدل أو ممتاز.

وإختيار أى خطة من الخطط المطروحة يتطلب من القائمين على إدارة المشروع مقارنة منفعة المشروع المتوقعة من كل خطة من الخطط المتاحة لإختيار أفضلها حيث أن الخطة التى تحقق أكبر منفعة متوقعة للمشروع تعتبر هى الخطة الأفضل.

ولكى تكون الصورة أكثر وضوحاً نفترض أن هناك تاجر يتعامل فى ثلاث سلع على الأكثر من السلع التى تتلف فى حالة عدم بيعها خلال نفس اليوم وبفرض أن الخطط المتاحة أمام هذا التاجر تتحدد على أساس عدد السلع المتعامل فيها وتتمثل فى الخطط الآتية :-

الخطة الأولى ($ط_1$) ألا يتعامل فى هذه السلعة.

الخطة الثانية ($ط_2$) أن يتعامل فى سلعة واحدة.

الخطة الثالثة ($ط_3$) أن يتعامل فى سلعتين.

الخطة الرابعة ($ط_4$) أن يتعامل فى ثلاث سلع.

وبفرض أن حالات الطلب على السلعة يتمثل فى الحالات الآتية :-

الطلب الأول ($ب_1$) طلب ردىء وذلك فى حالة عدم بيع أى سلعة.

الطلب الثانى ($ب_2$) طلب أقل من المتوسط فى حالة بيع سلعة واحدة.

الطلب الثالث ($ب_3$) طلب معتدل فى حالة بيع سلعتين.

الطلب الرابع ($ب_4$) طلب ممتاز فى حالة بيع ثلاث سلع.

وحتى يتمكن هذا التاجر من تحديد الخطة المناسبة يجب تحديد إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة وهذه الإحتمالات يمكن تحديدها إذا توافرت لدى التاجر بيانات عن

التجار الآخرين الذين يتعاملون فى نفس نوع السلعة التى يتعامل فيها هذا التاجر وهذه الإحتمالات تعتمد أساساً على خبرة هذا التاجر. ولإختيار الخطة التى تحقق أكبر منفعة متوقعة يتم إتباع الخطوات الآتية :-

أولاً : تحديد إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة :-

ويتم تحديد إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة عن طريق :

أ- تحديد إحتمال البيع ومنه تحديد إحتمال عدم البيع.

ب- عن طريق إحتمال البيع وإحتمال عدم البيع يتم تكوين جدول توزيع ثنائى الحدين ومن هذه الجدول يتم إيجاد إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة ح (ب١)، ح (ب٢)، ح (ب٣)، ح (ب٤).

ثانياً : تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر :-

وهنا يتم تحديد ربح أو خسارة التاجر فى حالة إتباع الخطة الأولى (ط١) مع جميع حالات الطلب (ب١، ب٢، ب٣، ب٤) بمعلومية ثمن شراء السلعة وثمن بيعها.

مثال (١) :-

يقوم أحد التجار بتوزيع ثلاث سلع الأكثر فى خلال موسم معين من السلع التى تتلف إذا بقيت حتى نهاية الموسم دون بيع فإذا كان ثمن شراء السلعة ٢٠٠ جنيه وثمن بيعها ٣٠٠ جنيه وأن الخطط المتاحة لهذا التاجر هى :

الخطة الأولى (ط١) ألا يتعامل فى هذه السلعة.

الخطة الثانية (ط٢) أن يتعامل فى سلعة واحدة.

الخطة الثالثة (ط٣) أن يتعامل فى سلعتين.

الخطة الرابعة (ط٤) أن يتعامل فى ثلاث سلع.

وأن حالات الطلب على السلعة تتمثل فى الحالات الآتية :-

الحالة الأول (ب١) طلب ردىء فى حالة عدم بيع أى سلعة.

الحالة الثانى (ب٢) طلب أقل من المتوسط فى حالة بيع سلعة واحدة.

الحالة الثالث (ب٣) طلب معتدل فى حالة بيع سلعتين.

الحالة الرابع (ب٤) طلب ممتاز فى حالة بيع ثلاث سلع.

فإذا أمكن جمع بيانات عن ١٠٠٠ تاجر كان يتعامل كل منهم فى الموسم السابق فى نفس نوع السلع التى يتعامل فيها هذا التاجر وهذه البيانات هى :-

عدد السلع المباعة	٠	١	٢	٣
عدد التجار	١٠٠	٢٨٠	٤٠٠	٢٢٠

والمطلوب :- تحديد الخطة التى تحقق للتاجر أكبر منفعة متوقعة.

الحل :-

لتحديد الخطة التى تحقق للتاجر أكبر منفعة متوقعة نتبع الخطوات الآتية :-

١- تحديد إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة.

٢- تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر (الخطط مقترنة بحالات الطلب).

٣- تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة ومن هذه المصفوفة يتم إختيار الخطة التى تحقق للتاجر أكبر منفعة متوقعة.

أولاً : تحديد إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة

أ- إيجاد إحتمال البيع ومنه إيجاد إحتمال عدم البيع.

ولإيجاد إحتمال البيع يجب حساب متوسط عدد السلع التى باعها كل تاجر من هؤلاء التجار والتى جمعت عنهم بيانات عن الموسم السابق وقسمة هذا المتوسط على عدد السلع التى يتعامل فيها كل من هؤلاء التجار نحصل على الإحتمال.

$$\text{الإحتمال} = \frac{\text{المتوسط}}{\text{عدد السلع المتعامل فيها}} = \frac{م}{ن}$$

عدد السلع المباعة	عدد التجار	عدد السلع المباعة × عدد التجار
٠	١٠٠	صفر
١	٢٨٠	٢٨٠
٢	٤٠٠	٨٠٠
٣	٢٢٠	٦٦٠
المجموع الكلى	١٠٠٠	١٧٤٠

إجمالى (عدد السلع × عدد التجار)

المتوسط = ———————————

عدد التجار

١٧٤٠

= ——— = ١,٧٤

١٠٠٠

المتوسط م

الإحتمال = ——————— = —

عدد السلع المتعامل فيها ن

١,٧٤

= ——— = ٠,٥٨

٣

إحتمال عدم البيع = ١ ــ ٠,٥٨ = ٠,٤٢

ب- تكوين جدول توزيع ثنائى الحدين.

عن طريق إحتمال البيع (٠,٥٨) وإحتمال عد البيع (٠,٤٢) يمكن تكوين جدول توزيع ثنائى الحدين وإيجاد مفكوك المقدار $(٠,٥٨+٠,٤٢)^{٣}$ فإذا رمزنا لحالات الطلب

ر	ح ر
٠	ح(٠)= $ق_{٠}^{٣}$ $(٠,٥٨)^{٠}$ $(٠,٤٢)^{٣}$ = ٠,١
١	ح(١)= $ق_{١}^{٣}$ $(٠,٥٨)^{١}$ $(٠,٤٢)^{٢}$ = ٠,٣
٢	ح(٢)= $ق_{٢}^{٣}$ $(٠,٥٨)^{٢}$ $(٠,٤٢)^{١}$ = ٠,٤
٣	ح(٣)= $ق_{٣}^{٣}$ $(٠,٥٨)^{٣}$ $(٠,٤٢)^{٠}$ = ٠,٢
مج	المجموع = ١,٠٠٠

ويلاحظ أن :-

ح($ب_{١}$) إحتمال تحقق الطلب الأول ويمثل إحتمال تحقق حالة الطلب الردىء.

= ح(٠) = ٠,١

ح($ب_{٢}$) إحتمال تحقق الطلب الثانى ويمثل إحتمال تحقق الطلب.

الأقل من المتوسط ح(١) = ٠,٣

ح($ب_{٣}$) إحتمال تحقق الطلب الثالث ويمثل إحتمال تحقق الطلب المعتدل.

= ح(٢) = ٠,٤

ح($ب_{٤}$) إحتمال تحقق الطلب الرابع ويمثل إحتمال تحقق حالة الطلب الممتاز.

= ح(٣) = ٠,٢

وهذه الإحتمالات سوف يتم إستخدامها فى الخطوة الثالثة عند تحديد مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة.

ثانياً : تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر:- (الخطط مقترنة بحالات الطلب).

حالات الطلب ثمن البيع ٣٠٠ جنيه / الخطط المتاحة ثمن الشراء ٢٠٠ جنيه	$ب_{١}$ (٠)	$ب_{٢}$ (١)	$ب_{٣}$ (٢)	$ب_{٤}$ (٣)
	٠×٣٠٠=صفر	١×٣٠٠= ٣٠٠	٢×٣٠٠= ٦٠٠	٣×٣٠٠= ٩٠٠
$ط_{١}$ (٠) ٠×٢٠٠=صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
$ط_{٢}$ (١) ١×٢٠٠=٢٠٠	-٢٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠
$ط_{٣}$ (٢) ٢×٢٠٠=٤٠٠	-٤٠٠	-١٠٠	٢٠٠	٢٠٠
$ط_{٤}$ (٣) ٣×٢٠٠=٦٠٠	-٦٠٠	-٣٠٠	صفر	٣٠٠

ثالثاً : مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة.

إحتمالات تحقق حالات الطلب / الخطط المتاحة	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	المنافع المتوقعة
	٠,١	٠,٣	٠,٤	٠,٢	
ط١ (٠) ٠×٢٠٠=صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ط٢ (١) ١×٢٠٠=٢٠٠	٢٠-	٣٠	٤٠	٢٠	٧٠
ط٣ (٢) ٢×٢٠٠=٤٠٠	٤٠-	٣٠-	٨٠	٤٠	٥٠
ط٤ (٣) ٣×٢٠٠=٦٠٠	٦٠-	٩٠-	صفر	٦٠	٩٠-

∴ الخطة التى تحقق أكبر منفعة متوقعة هى الخطة الثانية التعامل وسلعة واحدة وهنا يتحقق ربح مقداره ٧٠ جنيه.

مثال (٢) :-

فى إحدى الشركات التجارية وجد أن ضمن شراء السلعة ٢٠٠ جنيه وثمن بيعها ٣٠٠ جنيه فإذا كانت الخطط المتاحة أمام هذه الشركة كما يلى بفرض أن السلعة التى تبقى دون بيع تفقد قيمتها وتعتبر خسارة.

(ط١) الخطة الأولى عدم التعامل فى هذه السلعة.

(ط٢) الخطة الثانية التعامل فى سلعة واحدة.

(ط٣) الخطة الثالثة التعامل فى سلعتين.

(ط٤) الخطة الرابعة أن يتعامل فى ثلاث سلع.

(ط٥) الخطة الخامسة اليتعامل فى أربع سلع.

وكانت حالات الطلب على السلعة تتمثل فى الحالات الآتية :-

(ب١) الطلب الأول :- عدم طلب أى سلعة.

(ب٢) الطلب الثانى :- طلب سلعة واحدة.

(ب٣) الطلب الثالث :- يتمثل فى بيع سلعتين.

(ب٤) الطلب الرابع :- يتمثل فى بيع ثلاث سلع.

(ب٥) الطلب الخامس:- يتمثل فى بيع أربع سلع.

فإذا تم تجميع بيانات عن ١٠٠٠ شركة كانت تتعامل فى الموسم السابق فى نفس نوع السلع التى تتعامل فيها هذه الشركة وكانت هذه البيانات كما يلى :-

عدد السلع	٠	١	٢	٣	٤
عدد الشركات	١٠	٨٠	١١٠	٣٠٠	٥٠٠

والمطلوب:- تحديد الخطة التى تحقق للشركة أكبر منفعة متوقعة.

الحل :-

أولاً : تحديد إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة :-

أ- إيجاد إحتمال البيع ومنه إيجاد إحتمال عدم البيع.

عدد السلع المباعة	عدد الشركات	عدد السلع × عدد الشركات
٠	١٠	صفر
١	٨٠	٨٠
٢	١١٠	٢٢٠
٣	٣٠٠	٩٠٠
٤	٥٠٠	٢٠٠٠
المجموع الكلى	١٠٠٠	٣٢٠٠

إجمالى (عدد السلع × عدد الشركات)

المتوسط = ــــــــــــــــــــــــــــــــ

عدد الشركات

٣٢٠٠

= ــــــــــ = ٣,٢

١٠٠٠

المتوسط

إحتمال البيع = ــــــــــــــــــــــــــــــــ

عدد السلع المتعامل فيها

٣,٢

= ــــــــــ = ٠,٨

٤

إحتمال عدم البيع = ١ ــ ٠,٨ = ٠,٢

ب- تكوين جدول توزيع ثنائى الحدين.

يتم إيجاد مفكوك المقدار $(٠,٨+٠,٢)^{٤}$

ر	ح ر
٠	ح(٠)= ^{٤}ق. $(٠,٨)^{٠}$ $(٠,٢)^{٤}$ = ٠,٠٠١٦
١	ح(١)= ^{٤}ق$_{١}$ $(٠,٨)^{١}$ $(٠,٢)^{٣}$ = ٠,٢٥٦
٢	ح(٢)= ^{٤}ق$_{٢}$ $(٠,٨)^{٢}$ $(٠,٢)^{٢}$ = ٠,١٥٣٦
٣	ح(٣)= ^{٤}ق$_{٣}$ $(٠,٨)^{٣}$ $(٠,٢)^{١}$ = ٠,٤٠٩٦
٤	ح(٤)= ^{٤}ق$_{٤}$ $(٠,٨)^{٤}$ $(٠,٢)^{٠}$ = ٠,٤٠٩٦
مجـ	المجموع الكلى = ١,٠٠٠

ويلاحظ أن :-

أ- إحتمال تحقق الطلب الأول : عدم طلب أى سلع.

ح(ب$_{١}$) = ٠,٠٠١٦

ب- إحتمال تحقق الطلب الثانى : طلب سلعة واحدة.

ح(ب$_{٢}$) = ح(١) = ٠,٠٢٥٦

جـ- إحتمال تحقق الطلب الثالث : طلب سلعتين.

ح(ب$_{٣}$) = ح(٢) = ٠,١٥٣٦

د- إحتمال تحقق الطلب الرابع : طلب ٣ سلع.

ح(ب$_{٤}$) = ح(٣) = ٠,٤٠٩٦

هـ- إحتمال تحقق الطلب الخامس : طلب ٤ سلع.

ح(ب$_{٥}$) = ح(٤) = ٠,٤٠٩٦

ثانياً : تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر:- (الخطط مقترنة بحالات الطلب).

حالات الطلب ثمن البيع ٣٠٠ جنيه / الخطط المتاحة ثمن الشراء ٢٠٠ جنيه	ب$_{١}$ (٠)	ب$_{٢}$ (١)	ب$_{٣}$ (٢)	ب$_{٤}$ (٣)	ب$_{٥}$ (٤)
	٣٠٠×٠ =صفر	٣٠٠×١ =٣٠٠	٣٠٠×٢ =٦٠٠	٣٠٠×٣ =٩٠٠	٣٠٠×٤ =١٢٠٠
ط$_{١}$ (٠) ٠×٢٠٠=صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ط$_{٢}$ (١) ١×٢٠٠=٢٠٠	-٢٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠
ط$_{٣}$ (٢) ٢×٢٠٠=٤٠٠	-٤٠٠	-١٠٠	٢٠٠	٢٠٠	٢٠٠
ط$_{٤}$ (٣) ٣×٢٠٠=٦٠٠	-٦٠٠	-٣٠٠	صفر	٣٠٠	٣٠٠
ط$_{٥}$ (٤) ٤×٢٠٠=٨٠٠	-٨٠٠	-٥٠٠	-٢٠٠	١٠٠	٤٠٠

ثالثاً : مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة.

إحتمالات تحقق حالات الطلب / الخطط المتاحة	ب١ (٠)	ب٢ (١)	ب٣ (٢)	ب٤ (٣)	ب٥ (٤)	المنافع المتوقعة
	٠,٠٠١٦	٠,٢٥٦	٠,١٥٣٦	٠,٤٠٩٦	٠,٤٠٩٦	
ت (ط١) (٠)	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ت (ط٢) (١)	٠,٣٢-	٢,٥٦	١٥,٣٦	٤٠,٩٦	٤٠,٩٦	٩٩,٥٢
ت (ط٣) (٢)	٦٤-	٢,٥٦-	٣٠,٧٢	٨١,٩٢	٨١,٩٢	١٩١,٣٦
ت (ط٤) (٣)	٩٦-	٧,٦٨-	صفر	١٢٢,٨٨	١٢٢,٨٨	٢٣٧,١٢
ت (ط٥) (٤)	١٢٨-	١٢,٨-	٣٠,٧٢-	٤٠,٩٦	٤٠,٩٦	٣٧,١٢

∴ على التاجر إتباع الخطة الرابعة وهى التعامل مع ثلاث سلع وفى هذه الحالة يحقق ربح مقداره ٢٣٧,١٢.

مثال (٣) :-

قامت إحدى الشركات الصناعية بدراسة الطلب الأسبوعى على السلعة التى تنتجها وإحتمالات تحقق هذا الطلب وقد تبين لها أن عدد السلع المباعة أسبوعياً يتراوح ما بين ٢٠، ٢٣ سلعة وأن إحتمالات تحقق الطلب كانت كما يلى :-

عدد السلع	٢٠	٢١	٢٢	٢٣
الاحتمال	٠,١٠	٠,٣٠	٠,٤٠	٠,٢٠

فإذا كانت تكاليف إنتاج السلعة ١٠٠ج وثمن بيعها ٢٠٠ ج وقد طلبت منك الشركة تحديد عدد السلع الواجب إنتاجها إسبوعياً بفرض أن السلعة التى تبقى دون بيع تفقد قيمتها وتعتبر خسارة على الشركة.

الحل :-

فى هذا التمرين توفر لدينا إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة لذلك ليس هناك حاجة إلى تكوين جدول ثنائى الحدين لإيجاد إحتمالات تحق حالات الطلب المختلفة وسوف نبدأ الحل بإيجاد مصفوفة الأرباح والخسائر ثم مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة. وذلك بعد إفتراض الخطط وحالات الطلب حيث أن :-

الخطط (ط)	حالات الطلب (ل)
(ط١) الخطة الأولى إنتاج ٢٠ سلعة	(ب١) حالة الطلب الأولى طلب ٢٠ سلعة
(ط٢) الخطة الثانية إنتاج ٢١ سلعة	(ب٢) حالة الطلب الثانية طلب ٢١ سلعة
(ط٣) الخطة الثالثة إنتاج ٢٢ سلعة	(ب٣) حالة الطلب الثالثة طلب ٢٢ سلعة
(ط٤) الخطة الرابعة إنتاج ٢٣ سلعة	(ب٤) حالة الطلب الرابعة طلب ٢٣ سلعة

وعلى أساس الخطط وحلات الطلب السابقة وتكاليف إنتاج السلعة وثمن بيعها يتم تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر.

أولاً : تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر:-

حالات الطلب ثمن البيع ٢٠٠ جنيه / الخطط المتاحة ثمن الشراء ١٠٠ جنيه	ب١ (٢٠)	ب٢ (٢١)	ب٣ (٢٢)	ب٤ (٢٣)
	=٢٠٠×٢٠ ٤٠٠٠	=٢٠٠×٢١ ٤٢٠٠	=٢٠٠×٢٢ ٤٤٠٠	=٢٠٠×٢٣ ٤٦٠٠
ط١ (٢٠) ٢٠×١٠٠=٢٠٠٠	٢٠٠٠	٢٠٠٠	٢٠٠٠	٢٠٠٠
ط٢ (٢٠) ٢١×١٠٠=٢١٠٠	١٩٠٠	٢١٠٠	٢١٠٠	٢١٠٠
ط٣ (٢٠) ٢٢×١٠٠=٢٢٠٠	١٨٠٠	٢٠٠٠	٢٢٠٠	٢٢٠٠
ط٤ (٢٠) ٢٣×١٠٠=٢٣٠٠	١٧٠٠	١٩٠٠	٢١٠٠	٢٣٠٠

ثانياً : مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة.

إحتمالات تحقق حالات الطلب / الخطط المتاحة	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	المنافع المتوقعة
	٠,١	٠,٣	٠,٤	٠,٢	
ت (ط١) (٢٠)	٢٠٠	٦٠٠	٨٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠
ت (ط٢) (٢١)	١٩٠	٦٣٠	٨٤٠	٤٢٠	٢٠٨٠
ت (ط٣) (٢٢)	١٨٠	٦٠٠	٨٨٠	٤٤٠	٢١٠٠
ت (ط٤) (٢٣)	١٧٠	٥٧٠	٨٤٠	٤٦٠	٢٠٤٠

∴ على التاجر إتباع الخطة الثالثة وهى التعامل فى ٢٢ سلعة وفى هذه الحالة يحقق أرباح قدرها ٢١٠٠ جنيه.

ملخص الوحدة الدراسية

بعد دراسة الوحدة الدراسية الرابعة يجب أن يكون الدارس ملماً بمراقبة جودة الإنتاج وكيفية تحديد ما إذا كان الإنتاج سليم أو غير سليم. وذلك عن طريق أسلوبين :

أولاً :- مقارنة الإحتمال النظرى لإنتاج السلع الجيدة بالإحتمال الفعلى.

ثانياً :- مقارنة توزيع العينات من واقع الإختبار الفعلى بتوزيع العينات من واقع الإختبار النظرى.

وكذلك على دراية بعملية إختيار سياسة او خطة من بين مجموعة من الخطط المتاحة وهو ما يطلق عليه المنفعة المتوقعة فى إتخاذ القرارات الإدارية. فى ضوء ثمن شراء السلعة وثمن البيع ومجموعة من الخطط يقابلها مجموعة من حالات الطلب وإحتمالات تحقق كل حالة من حالات الطلب.

أسئلة الوحدة الدراسية

السؤال الأول

قامت إحدى الشركات الصناعية بدراسة الطلب الأسبوعى على السلعة التى تنتجها وإحتمالات تحقق هذا الطلب وقد تبين لها أن عدد السلع المباعة أسبوعياً يتراوح ما بين ٢٠، ٢٣ سلعة وأن إحتمالات تحقق الطلب كانت كما يلى :-

عدد السلع	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨
الاحتمال	٠,١	٠,٣	٠,٤	٠,٢

فإذا كانت تكاليف إنتاج السلعة ١٠٠ج وثمن بيعها ٢٠٠ ج وقد طلبت منك الشركة تحديد عدد السلع الواجب إنتاجها إسبوعياً بفرض أن السلعة التى تبقى دون بيع تفقد قيمتها وتعتبر خسارة على الشركة.

السؤال الثانى :

قامت إحدى الشركات بدراسة الطلب الأسبوعى على السلعة التى تنتجها وإحتمالات تحقق هذا الطلب وقد تبين لها أن عدد السلع المباعة أسبوعياً يتراوح ما بين ٣ : ٦ سلع وأن إحتمالات تحقق الطلب كانت كما يلى :-

عدد السلع المباعة	٧	٨	٩	١٠
الاحتمال	٠,١	٠,٣	٠,٤	٠,٢

والمطلوب : تحديد عدد السلع الواجب إنتاجها أسبوعياً لتحقيق أكبر منفعة متوقعة إذا علمت أن تكلفة السلعة على الشركة ١٠٠ جنيه. وأن بيعها للمستهلك ٢٠٠ جنيه وبفرض أن السلع التى تبقى بدون بيع حتى نهاية الأسبوع تفقد قيمتها وتعتبر خسارة على الشركة.

نموذج أسئلة محلوله
على الوحدة الدراسية

أجب على السؤال التالى :

قامت إحدى الشركات الصناعية بدراسة الطلب الأسبوعى على السلعة التى تنتجها وإحتمالات تحقق هذا الطلب وقد تبين لها أن عدد السلع المباعة أسبوعياً يتراوح ما بين ٢٠، ٢٣ سلعة وأن إحتمالات تحقق الطلب كانت كما يلى :-

عدد السلع	٢٠	٢١	٢٢	٢٣
الاحتمال	٠,١٠	٠,٣٠	٠,٤٠	٠,٢٠

فإذا كانت تكاليف إنتاج السلعة ١٠٠ج وثمن بيعها ٢٠٠ ج وقد طلبت منك الشركة تحديد عدد السلع الواجب إنتاجها إسبوعياً بفرض أن السلعة التى تبقى دون بيع تفقد قيمتها وتعتبر خسارة على الشركة.

الإجابة

١- إيجاد مصفوفة الأرباح والخسائر ثم مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة. وذلك بعد إفتراض الخطط وحالات الطلب حيث أن :-

الخطط (ط)	حالات الطلب (ل)
(ط١) الخطة الأولى إنتاج ٢٠ سلعة	(ب١) حالة الطلب الأولى طلب ٢٠ سلعة
(ط٢) الخطة الثانية إنتاج ٢١ سلعة	(ب٢) حالة الطلب الثانية طلب ٢١ سلعة
(ط٣) الخطة الثالثة إنتاج ٢٢ سلعة	(ب٣) حالة الطلب الثالثة طلب ٢٢ سلعة
(ط٤) الخطة الرابعة إنتاج ٢٣ سلعة	(ب٤) حالة الطلب الرابعة طلب ٢٣ سلعة

وعلى أساس الخطط وحلات الطلب السابقة وتكاليف إنتاج السلعة وثمن بيعها يتم تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر.

أولاً : تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر:-

حالات الطلب ثمن البيع ٢٠٠ جنيه / الخطط المتاحة ثمن الشراء ١٠٠ جنيه	ب١ (٢٠)	ب٢ (٢١)	ب٣ (٢٢)	ب٤ (٢٣)
	=٢٠٠×٢٠ ٤٠٠٠	=٢٠٠×٢١ ٤٢٠٠	=٢٠٠×٢٢ ٤٤٠٠	=٢٠٠×٢٣ ٤٦٠٠
ط١ (٢٠) ٢٠×١٠٠=٢٠٠٠	٢٠٠٠	٢٠٠٠	٢٠٠٠	٢٠٠٠
ط٢ (٢٠) ٢١×١٠٠=٢١٠٠	١٩٠٠	٢١٠٠	٢١٠٠	٢١٠٠
ط٣ (٢٠) ٢٢×١٠٠=٢٢٠٠	١٨٠٠	٢٠٠٠	٢٢٠٠	٢٢٠٠
ط٤ (٢٠) ٢٣×١٠٠=٢٣٠٠	١٧٠٠	١٩٠٠	٢١٠٠	٢٣٠٠

ثانياً : مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة.

إحتمالات تحقق حالات الطلب / الخطط المتاحة	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	المنافع المتوقعة
	٠,١	٠,٣	٠,٤	٠,٢	
ت (ط١) (٢٠)	٢٠٠	٦٠٠	٨٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠
ت (ط٢) (٢١)	١٩٠	٦٣٠	٨٤٠	٤٢٠	٢٠٨٠
ت (ط٣) (٢٢)	١٨٠	٦٠٠	٨٨٠	٤٤٠	٢١٠٠
ت (ط٤) (٢٣)	١٧٠	٥٧٠	٨٤٠	٤٦٠	٢٠٤٠

∴ على التاجر إتباع الخطة الثالثة وهى التعامل فى ٢٢ سلعة وفى هذه الحالة يحقق أرباح قدرها ٢١٠٠ جنيه.

الوحدة الدراسية الرابعة

التفاضل وتطبيقاته التجارية

١- التغير فى الدالة :-

إذا فرضنا أن ص دالة فى س أى ص = د (س) حيث س متغير مستقل، ص متغير تابع، فإذا حدث تغير فى قيمة س فإنه يجب أن يحدث تغير مناظر لذلك فى قيمة ص. ويرمز للتغير فى س بالرمز Δ س، والتغير فى ص بالرمز Δ ص.

فإذا فرضنا أن هناك مربع طول ضلعه س ومساحة المربع يرمز لها بالرمز ص فإن مساحة هذا المربع هو ص = س فإذا حدث تغير فى س قدره Δ س فإن الدالة ص تتغير تغيراً مناظراً قدره Δ ص مع ملاحظة أنه ليس من الضرورى أن تتمشى ص مع س فى الاتجاه والمقدار.

فإذا أردنا إيجاد التغير قبل وبعد الزيادة نجد أن :

ص = س^{٢} (١)

ص + Δ ص = (س + Δ س)^{٢}

ص + Δ ص = س^{٢} + ٢ س Δ س + Δ س -٢ (٢)

بطرح معادلة (١) من معادلة (٢)

ص + Δ ص = س^{٢} + ٢ س Δ س + س -٢ (٢)

ص = س^{٢}

Δ ص = ٢ س Δ س + Δ س -٢

ولايجاد متوسط تغيير الدالة يتم قسمة كل من الطرفين على Δ س

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = ٢ \text{س} + \Delta \text{س}$$

ويهتم علم التفاضل بالبحث فيما يؤول إليه هذا الكسر.

عندما نكون Δ س صغير جداً وتؤول فى النهاية إلى الصفر.

٢- نهاية معدل التغير :

يسمى تغير الدالة ص بالنسبة لـ س بأنه نهاية متوسط المتغير لها عندما يؤول التغير فى س إلى الصفر أى أن معدل تغيير الدالة ص بالنسبة إلى س =

$$\text{نهـا}_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

ويطلق على متغير تغيير الدالة ص بالنسبة إلى س بالمشتقة الأولى للدالة ص بالنسبة إلى س أو بالمعادلة التفاضل الأول للدالة ص بالنسبة إلى س ويرمز لذلك

بالرمز $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ أى أن

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} \quad \text{نهـا}_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

ويطلق على الرمز $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ أحد المسميات الآتية :-

- معدل تغير ص بالنسبة إلى س .
- المشتقة الأولى للدالة ص بالنسبة إلى س
- المعامل التفاضل الأول ص بالنسبة إلى س
- ميل المماس للمنحنى.
- $\overline{ص}$
- الإيراد الحدى.
- الربح الحدى.

- التكلفة الحدية.

وإذا ذكر أى لفظ من الألفاظ السابقة فى التمرين معناه إجراء عملية التفاضل.

٣- كيفية إجراء عملية التفاضل وإيجاد المشتقة الأولى للدالة من المبادىء الأولية:-

١/٣ كيفية إجراء عملية التفاضل :

إذا كانت ص = $س^{٢}$

كان $\frac{د ص}{د س}$ = $\overline{ص}$ = ٢ س

ملحوظة : ثم ضرب الأس × معامل السين وإنقاص الأس واحد صحيح.

إذا كانت ص = $س^{٣}$

كان $\frac{د ص}{د س}$ = ٣ $س^{٢}$

٣- القواعد الأساسية للتفاضل :-

١/٣ القاعدة الأولى :-

إذا كانت ص = $س^{ن}$ حيث ن عدد صحيح موجب.

فإن المشتقة الأولى للدالة أو المعامل التفاضل الأولى يكون.

$\frac{د ص}{د س}$ = ن $س^{ن-١}$

مثال (٣) :

إذا كانت ص = $س^{٤}$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل :

$\frac{د ص}{د س}$ = ٤ $س^{٣}$

٢/٣ القاعدة الثانية :-

المشتقة الأولى للدالة الثانية = صفر

إذا كانت ص = ع حيث ع مقدار ثابت = فإن

$\frac{د ص}{د س}$ = صفر

مثال (٤) :

إذا كانت ص = ١٥ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل :

$\frac{د ص}{د س}$ = صفر

٣/٣ القاعدة الثالثة :-

المشتقة الأولى لحاصل ضرب ثابت فى دالة

= الثابت × تفاضل هذه الدالة

إذا كانت ص = ع .(س) حيث ع مقدار ثابت

فإن المشتقة الأولى للدالة = ج. $\frac{د ص}{د س}$

مثال (٥) :

إذا كانت ص = ٥ $س^{٣}$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل :

$\frac{د ص}{د س}$ = ١٥ $س^{٢}$

٤/٣ القاعدة الرابعة :-

المشتقة الأولى للمجموع الجبرى لعدد محدود من الدوال القابلة للإشتقاق يساوى المجموع الجبرى لمشتقات هذه الدوال.

مثال (٦) :

أوجد المشتقة الأولى للدالة

ص = ٣ $س^{٤}$ + ٢ $س^{٣}$ + ٣ $س^{٢}$ + ٥ س + ٨

الحل :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١٢ \text{ س}^{٣} + ٦ \text{ س}^{٢} + ٦ \text{ س} + ٥$$

مثال (٧) :

أوجد المشتقة الأولى للدالة

$$\text{ص} = ٥ \text{ س}^{٦} + ٣ \text{ س}^{٥} + ٤ \text{ س}^{٤} + ٥ \text{ س}^{٣} + ٢ \text{ س}^{٢} + ٥ \text{ س} + ١٥$$

الحل :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٣٠ \text{ س}^{٥} + ١٥ \text{ س}^{٤} + ١٦ \text{ س}^{٣} + ١٥ \text{ س}^{٢} + ٤ \text{ س} + ٥$$

٥/٣ القاعدة الخامسة :-

المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين

= الأول × تفاضل الثانى + الثانى × تفاضل الأول

فإذا كان لدينا ع ، م دالتين فى س وكل منهما قابل للإشتقال عند س وكانت الدالة ص قابلة للإشتقاق عند س حيث.

$$\text{ص} = \text{ع} \times \text{م}$$

$$\text{فإن } \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ع} \times \frac{\text{د م}}{\text{د س}} + \text{م} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$$

مثال (٨) :

إذا كانت ص = $(\text{س}^{٢} + ١)(\text{س}^{٣} + ٤)$ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = (\text{س}^{٢} + ١)\, ٣ \text{ س}^{٢} + (\text{س}^{٣} + ٤)\, ٢ \text{ س}$$

$$= ٣ \text{ س}^{٤} + ٣ \text{ س}^{٢} + ٢ \text{ س}^{٤} + ٨ \text{ س}$$

$$= ٥ \text{ س}^{٤} + ٣ \text{ س}^{٢} + ٨ \text{ س}$$

مثال (٩) :

إذا كانت ص = $(\text{س}^{٣} + ٢)(\text{س}^{٢} + ١)$ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = (\text{س}^{٣} + ٢)\, ٢ \text{ س} + (\text{س}^{٢} + ١)\, ٣ \text{ س}^{٢}$$

$$= ٢ \text{ س}^{٤} + ٤ \text{ س} + ٣ \text{ س}^{٤} + ٣ \text{ س}^{٢}$$

$$= ٥ \text{ س}^{٤} + ٣ \text{ س}^{٢} + ٤ \text{ س}$$

٥- التطبيقات التجارية على التفاضل

سيتم إيضاح التطبيقات التجارية على التفاضل من خلال الأمثلة الآتية :-

مثال (١٠) :-

تتحدد العلاقة بين التكاليف الكلية (ص) وحجم الإنتاج الكلى (س) وفقاً للدالة الآتية :-

$$\text{ص} = ٥ \text{ س}^{٣} + ٢ \text{ س}^{٢} + ٥ \text{ س} + ٨$$

أحسب معدل التغيير فى التكلفة الكلية بالنسبة للتغير فى حجم الإنتاج الكلى والذى يطلق عليه إصطلاح التكلفة الحدية وذلك عند حجم إنتاج كلى قدره ٢٠ وحدة.

الحل :

$$ص = ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٥ س + ٨$$

$$\frac{د ص}{د س} = ١٥ س^{٢} + ٤ س + ٥$$

وعند حجم إنتاج كلى قدره ٢٠ وحدة

$$\frac{د ص}{د س} = ١٥ (٢٠)^{٢} + ٤ \times ٢٠ + ٥$$

$$= ١٥ \times ٤٠٠ + ٨٠ + ٥$$

$$= ٦٠٠٠ + ٨٠ + ٥$$

$$= ٦٠٨٥$$

مثال (١١) :-

تتحدد العلاقة بين الربح الكلي (ص) وبين حجم الإنتاج الكلى (س) فى إحدى الصناعات وفقاً للدالة الآتية :-

$$ص = \frac{١}{٩} س^{٣} - ٩ س^{٢} - ٢٠ س + ١٨$$

أحسب معدل التغيير فى الربح الكلي بالنسبة للتغير فى حجم الإنتاج وذلك عند حجم إنتاج كلى قدره ٦٠ وحدة.

الحل :

$$ص = \frac{١}{٣} س^{٣} - ٩ س^{٢} - ٢٠ س + ١٨$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٣} س^{٢} - ١٨ س - ٢٠$$

$$= \frac{١}{٣} (٦٠)^{٢} - ١٨ \times ٦٠ - ٢٠$$

$$= \frac{٣٦٠٠}{٣} - ١٠٨٠ - ٢٠$$

$$= ١٢٠٠ - ١١٠٠$$

$$\frac{د ص}{د س} = ١٠٠$$

وهذا يعنى أن كل زيادة فى حجم الإنتاج بمقدار وحدة واحدة يؤدى إلى زيادة فى العائد بالنسبة للزيادة فى وحدة الإنتاج مقداره ١٠٠.

مثال (١٢) :-

إذا كانت تكاليف إنتاج (س) وحده من منتج ما تتحدد على أساس العلاقة الآتية:-

$$ص = ١٥ س - ٠,٨ س^{٢} + ٠,٠٥ س^{٣}$$

أوجد :

١- التكلفة الحدية عن إنتاج ٢٠ وحده.

٢- حجم الإنتاج الذى عنده التكلفة الحدية = ١٥ جنيه

الحل :

$$ص = ١٥ س - ٠,٨ س^{٢} + ٠,٠٥ س^{٣}$$

ملخص الوحدة الدراسية الرابعة

بعد دراسة الوحدة الدراسية الرابعة يجب أن يكون الدارس ملماً بمفهوم التفاضل وهو عبارة عن معدل تغير ص بالنسبة إلى س أو المشتقة الأولى للدالة أو معدل التغيير أو ميل المماس للمنحنى أو (ء ص / ء س) أو ص معنى ذلك أنه إذا ذكر أى لفظ من الألفاظ السابقة فى التمرين معناه إجراء عملية التفاضل.

ويتم إجراء عملية التفاضل بضرب الأس × معامل السين وينقص من الأس واحد وتفاضل المقدار الثابت يساوى صفر.

أوجد تفاضل الدالة الآتية ص = ٥ س^{٣} + ٤ س^{٢} + ١٨ س + ١٠

$\overline{ص}$ = ١٥ س^{٢} + ٨ س + ١٨

وهناك أيضاً من القواعد الأساسية تفاضل حاصل ضرب دالتين وتفاضل خارج قسمة دالتين وتفاضل قوس مرفوع لأس معين وإستخدام كل ما سبق فى التطبيقات التجارية الخاصة بالتفاضل.

أسئلة الوحدة الدراسية

السؤال الأول

إذا كانت دالة التكاليف الكلية ص = ٥ س^{٤} + ٦ س^{٣} + ٨ س^{٢} + ١٠ س + ١٢

أوجد دالة التكاليف الحدية، ثم أوجد التكلفة الحدية عند إنتاج ١٠ وحدات.

السؤال الثانى :

تتحدد العلاقة بين التكاليف الكلية ص وحجم الإنتاج الكلى س وفقاً للدالة الآتية

٧ س^{٣} + ٨ س^{٢} + ١٢ س + ١٥

أحسب معدل التغير وذلك عند حجم لإنتاج كلى قدره ٢٠ وحدة.

السؤال الثالث :

إذا كانت تكاليف إنتاج (س) وحدة من منتج معين تتحدد على أساس العلاقة الآتية:

ص = ١٠س^{٣} + ٨س^{٢} + ٧س + ٥

أوجد:

١- التكلفة الحدية.

٢- التكلفة الحدية عند إنتاج ١٠ وحدات.

نموذج أسئلة محلوله
على الوحدة الدراسية

أجب على السؤال التالى :

إذا كانت دالة التكاليف الكلية ص = ٥ س^{٤} + ٦ س^{٣} + ٨ س^{٢} + ١٠ س + ١٢

أوجد دالة التكاليف الحدية، ثم أوجد التكلفة الحدية عند إنتاج ١٠ وحدات.

الإجابة

ص/ = ٢٠ س^{٣} + ١٨ س^{٢} + ١٦ س + ١٠

ص/ = ٢٠ (١٠)^{٣} + ١٨ (١٠)^{٢} + ١٦ × ١٠ + ١٠

= ٢٠٠٠٠ + ١٨٠٠ + ١٦٠ + ١٠

= ٢١٩٧٠

الوحدة الخامسة
المحـــــــددات Determinants

١- مفهوم المحدد:

المحدد عبارة عن مجموعة من العناصر المرتبة فى شكل صفوف وأعمدة بشرط تساوى عدد الصفوف مع عدد الأعمدة، وتوضع هذه العناصر بين خطين رأسيين متوازيين ولكل محدد قيمة معينة تسمى "مفكوك المحدد" وتحصل عليها بعمليات حسابية معينة وللمحددات درجات (رتب) معينة، تتوقف على عدد الصفوف والأعمدة المكونة للمحدد، فإذا كان المحدد يتكون من عنصر واحد مرتب فى صف واحد وعمود واحد مثل |أ$_{١١}$| يقال أن المحدد من الدرجة (الرتبة) الأولى.

أما إذا كان المحدد مكون من أربعة عناصر مرتبة فى صفين وعمودين مثل:

$$\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{vmatrix}$$ فيقال أن المحدد من الدرجة الثانية

وبالمثل إذا كان المحدد يتكون من تسعة عناصر مرتبة فى ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة مثل:

$$\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$$ فيقال أن المحدد من الدرجة الثالثة

وكذلك إذا كان المحدد يتكون من ستة عشر عنصراً مرتبة في أربعة صفوف وأربعة أعمدة فيقال أن المحدد من الدرجة الرابعة... وهكذا

ويلاحظ وجود رقمين أسفل كل عنصر من عناصر المحدد حيث يرمز الرقم الأول من اليمين إلى ترتيب الصف الذى يقع فيه العنصر، بينما يشير الرقم الثانى إلى ترتيب العمود الذى يقع فيه العنصر أيضاً، فمثلاً العنصر أ$_{١١}$ يقع فى الصف الأول والعمود الأول، والعنصر أ$_{٢٢}$ يقع فى الصف الثانى والعمود الثالث.

٢- مفكوك المحدد من الدرجة الثانية:

مفكوك المحدد من الدرجة الثانية عبارة عن حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى ($أ_{١١}$، $أ_{٢٢}$) مطروحاً منها حاصل ضرب عناصر القطر الفرعى ($أ_{٢١}$، $أ_{٢١}$).

أى أن مفكوك $\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{vmatrix} = (أ_{١١} \times أ_{٢٢}) - (أ_{١٢} \times أ_{٢١})$

مثال (١):

أوجد مفكوك المحددات التالية:

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥- & ٤ \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} ٤- & ٣ \\ ٢- & ٥ \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} ٣- & ٢- \\ ٤- & ٥- \end{vmatrix}$$

الحـــل

مفكوك $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = (٥ \times ٤) - (٣ \times ٢) = ٢٠ - ٦ = ١٤$

مفكوك $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥- & ٤ \end{vmatrix} = (٣ \times ٤) - (٥- \times ٢) = ١٢ + ١٠ = ٢٢$

مفكوك $\begin{vmatrix} ٤- & ٣ \\ ٢- & ٥ \end{vmatrix} = (٤- \times ٥) - (٢- \times ٣) = ٢٠- + ٦ = ١٤-$

مفكوك $\begin{vmatrix} ٣- & ٢- \\ ٤- & ٥- \end{vmatrix} = (٣- \times ٥-) - (٤- \times ٢-) = ١٥ - ٨ = ٧$

٣- مفكوك المحدد من الدرجة الثالثة:

١/٣ طريقة مرافقات العناصر:

قبل أن نتعرف على طريقة إيجاد مفكوك المحدد من الدرجة الثالثة فى صورة:

$$\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$$

يجب أن نتعرف على التعريفين التاليين:

المحيدد:

محيدد أى عنصر هو المحدد الناتج من المحدد الأصلى بعد حذف جميع عناصر الصف والعمود الواقع فيهما هذا العنصر فمثلاً محيدد العنصر $أ_{١١}$ فى المحدد السابق هو:

$$\begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$$

وبالمثل فإن محيدد العنصر $أ_{٢٣}$ هو $\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٣٢} \end{vmatrix}$ وهكذا

المرافق:

مرافق أى عنصر هو عبارة عن محيدد العنصر مسبوقاً بإشارة معينة (+/-) ويتوقف نوع الإشارة التى تسبق المحيدد في مرافق أى عنصر على مجموع ترتيب الصف والعمود الذى يقع فيهما العنصر، فإذا كان المجموع زوجياً كانت الإشارة موجبة (+)، وإن كان المجموع فردياً كانت الإشارة سالبة (-) أى أن إشارة المحيدد تحدد بالقيمة $(-١)^{ترتيب\ الصف + ترتيب\ العمود}$

فمثلاً إشارة محيدد العنصر $أ_{١١}$ تتحدد بالقيمة $(-١)^{١+١}$ أى $(-١)^{٢}$ أى (١) فتكون إشارة المحيدد موجبة، وإشارة محيدد العنصر $أ_{٣٢}$ تتحدد بالقيمة $(-١)^{٣+٢}$ أى $(-١)^{٥}$ أى (-١) ∴ فالإشارة سالبة

ويمكن أن نضع الإشارات التى تسبق محيددات العناصر فى الصورة التالية:

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \end{vmatrix}$$

وهكذا

ووفقاً للتعريفين السابقين فإن مفكوك أى محدد من الدرجة الثالثة يتحدد كما يلى:

١- نختار أحد الأعمدة أو أحد الصفوف من هذا المحدد.

٢- نضرب كل عنصر من عناصر العمود أو الصف الذى اخترناه فى مرافقه.

٣- مفكوك المحدد = مجموع حواصل الضرب السابقة.

وعلى ذلك يكون مفكوك المحدد من الدرجة الثالثة باستخدام عناصر العمود الأول كما يلى:

$$\text{مفكوك} \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} = أ_{١١}(-١)^{١+١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{١٢}(-١)^{١+٢} \begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$$

$$+ أ_{١٣}(-١)^{١+٣} \begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \end{vmatrix}$$

$$= أ_{١١}(أ_{٢٢}أ_{٣٣} - أ_{٢٣}أ_{٣٢}) - أ_{١٢}(أ_{٢١}أ_{٣٣} - أ_{٢٣}أ_{٣١}) + أ_{١٣}(أ_{٢١}أ_{٣٢} - أ_{٢٢}أ_{٣١})$$

$$= أ_{١١}أ_{٢٢}أ_{٣٣} - أ_{١١}أ_{٢٣}أ_{٣٢} - أ_{١٢}أ_{٢١}أ_{٣٣} + أ_{١٢}أ_{٢٣}أ_{٣١} + أ_{١٣}أ_{٢١}أ_{٣٢} - أ_{١٣}أ_{٢٢}أ_{٣١}$$

وباستخدام عناصر الصف الأول يكون مفكوك المحدد كما يلى:

$$\text{مفكوك المحدد} = أ_{١١}(-١)^{١+١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{٢١}(-١)^{١+٢} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$$

$$+ أ_{٣١}(-١)^{١+٣} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$$

$$= أ_{١١}(أ_{٢٢}أ_{٣٣} - أ_{٢٣}أ_{٣٢}) - أ_{٢١}(أ_{١٢}أ_{٣٣} - أ_{١٣}أ_{٣٢}) + أ_{٣١}(أ_{١٢}أ_{٢٣} - أ_{١٣}أ_{٢٢})$$

$$= أ_{١١}أ_{٢٢}أ_{٣٣} - أ_{١١}أ_{٢٣}أ_{٣٢} - أ_{١٢}أ_{٢١}أ_{٣٣} - أ_{١٣}أ_{٢١}أ_{٣٢} + أ_{١٢}أ_{٢٣}أ_{٣١} - أ_{١٣}أ_{٢٢}أ_{٣١}$$

وهو نفس الناتج ويمكن للطالب أن يتأكد من أن استخدام أى عمود أو صف آخر سيعطى نفس النتيجة تماماً.

مع ملاحظة أن استخدام العمود الأول أو الصف الأول أسهل لأن إشارات محددات عناصرهما موجبة فسالبة فموجبة على الترتيب.

مثال (٢):

أوجد مفكوك $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & -٥ \\ ٥ & ١ & -٣ \\ -١ & ٣ & ٢ \end{vmatrix}$

الحـــل

باستخدام عناصر العمود الأول:

$$\text{مفكوك} \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & -٥ \\ ٥ & ١ & -٣ \\ -١ & ٣ & ٢ \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} = -٥ \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= -٥(-١ - ١٥) + ٣(-٤ - ٦) + ٢(٢٠ - ٢)$$

$$= -٥(-١٦) + ٣(-١٠) + ٢(١٨)$$

$$= ٨٠ - ٣٠ + ٣٦ = ١١٦ - ٣٠ = ٨٦$$

٢/٣ طريقة الأقطار:

يمكن إيجاد مفكوك المحدد من الدرجة الثالثة بالطريقة التالية:

١- نقوم بإضافة العمودين الأول والثانى بعد العمود الثالث (أو الصفين الأول والثانى بعد الصف الثالث).

٢- نقوم بإيجاد مجموع حاصل ضرب العناصر التى تقع على الأقطار الرئيسية (من اليمين إلى اليسار) ويطلق عليها الأقطار الموجبة.

٣- نقوم بإيجاد مجموع حاصل ضرب العناصر التى تقع على الأقطار الفرعية (من اليسار إلى اليمين) ويطلق عليها الأقطار السالبة.

مفكوك المحدد = مجموع حاصل ضرب الأقطار الموجبة

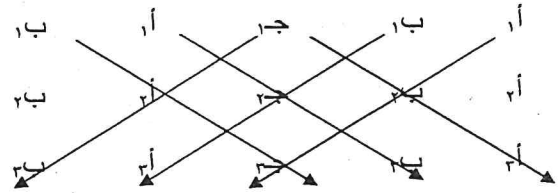
(-) مجموع حاصل ضرب الأقطار السالبة

يلاحظ أن عدد الأقطار الموجبة = عدد الأقطار السالبة

= عدد العناصر التى تقع على أى قطر = رتبة المحدد

فإذا كان لدينا المحدد $\begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 & جـ_1 \\ أ_2 & ب_2 & جـ_2 \\ أ_3 & ب_2 & جـ_3 \end{vmatrix}$

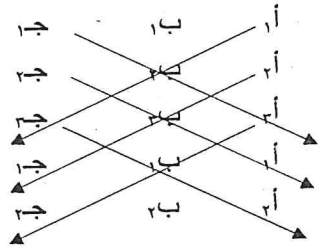
إما أن نقوم بإضافة العمودين الأول والثانى فيصبح:



الأقطار السالبة الأقطار الموجبة

$\Delta = [أ_1 ب_2 جـ_3 + ب_1 جـ_2 أ_3 + جـ_1 أ_2 ب_3] - [جـ_1 ب_2 أ_3 + أ_1 جـ_2 ب_3 + ب_1 أ_2 جـ_3]$

أو نقوم بإضافة الصفين الأول والثانى فيصبح:

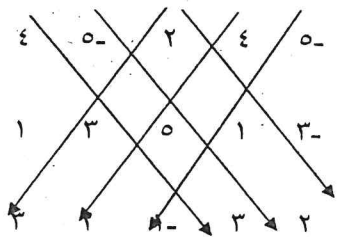


الأقطار السالبة الأقطار الموجبة

$\Delta = [أ_1 ب_2 جـ_3 + أ_2 ب_3 جـ_1 + أ_3 ب_1 جـ_2] - [جـ_1 ب_2 أ_3 + جـ_2 ب_3 أ_1 + جـ_3 ب_1 أ_2]$

وإذا أمعنا النظر نجد أن النتيجة واحدة مع اختلاف ترتيب أ، ب، جـ فى بعض الأحيان.

ولكى نتأكد من صحة الحل نقوم بإيجاد مفكوك المحدد الموجود بالمثال (٢) بإضافة العمودين الأول والثانى:



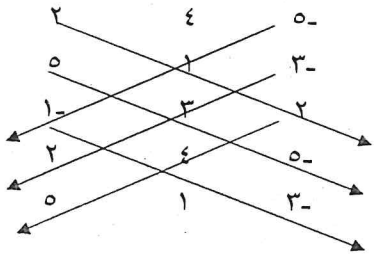
$\Delta = [(-٥ \times ١ \times -١) + (٤ \times ٥ \times ٢) + (٢ \times -٣ \times ٣)] - [(٢ \times ١ \times ٢)$

$+ (-٥ \times ٥ \times ٣) + (٤ \times -٣ \times -١)]$

$= (٥ + ٤٠ - ١٨) - (٤ - ٧٥ + ١٢)$

$= (٢٧) - (-٥٩) = ٢٧ + ٥٩ = ٨٦$ نفس النتيجة السابقة

بإضافة الصفين الأول والثانى:



$\Delta = [(-٥ \times ١ \times -١) + (-٣ \times ٣ \times ٢) + (٢ \times ٤ \times ٥)] - [(٣ \times ١ \times ٢)$

$+ (٥ \times -٣ \times ٥) + (-١ \times ٤ \times -٣)]$

$= (٥ - ١٨ + ٤٠) - (٤ - ٧٥ + ١٢)$

$= (٢٧) - (-٥٩) = ٢٧ + ٥٩ = ٨٦$ نفس النتيجة السابقة

٤- مفكوك المحدد من الدرجة الرابعة فأكثر

نتبع نفس الطريقة العامة فى إيجاد مفكوك المحدد من الدرجة الثالثة بأن نختار عناصر أحد الأعمدة أو أحد الصفوف ثم نضرب كل عنصر × مرافقه ثم نجمع الناتج فيكون هو المفكوك.

٥- حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات:

إن استخدام المحددات يمكن أن يسهل كثيراً العمليات الحسابية الخاصة بحل المعادلات الخطية وخاصة إذا كان عدد المعادلات والمتغيرات كبير ويتضح ذلك مما يلي:

إذا كان لدينا المعادلتين:

$$أ_١ س + ب_١ ص = م_١ \qquad (١)$$

$$أ_٢ س + ب_٢ ص = م_٢ \qquad (٢)$$

حيث س، ص متغيرات و $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $ب_١$ ، $ب_٢$ معاملات، $م_١$ ، $م_٢$ ثوابت

والمطلوب إيجاد قيمة س، ص التى تحقق المعادلتين.

ويمكن استنتاج أن حل المعادلتين السابقتين باستخدام المحددات يكون كما يلى:

$$س = \frac{\begin{vmatrix} م_١ & ب_١ \\ م_٢ & ب_٢ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{vmatrix}} \quad ، \quad ص = \frac{\begin{vmatrix} أ_١ & م_١ \\ أ_٢ & م_٢ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{vmatrix}}$$

وبالمثل إذا كانت لدينا المعادلات التالية:

$$أ_١ س + ب_١ ص + جـ_١ ع = م_١$$

$$أ_٢ س + ب_٢ ص + جـ_٢ ع = م_٢$$

$$أ_٣ س + ب_٣ ص + جـ_٣ ع = م_٣$$

$$فإن\ س = \frac{\begin{vmatrix} م_١ & ب_١ & جـ_١ \\ م_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ م_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix}} \quad ، \quad ص = \frac{\begin{vmatrix} أ_١ & م_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & م_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & م_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix}}$$

$$ع = \frac{\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & م_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & م_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & م_٣ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix}}$$

وإذا أطلقنا على مفكوك محدد معاملات العناصر (المقام) الرمز Δ (دلتا) فإن مفكوك محدد البسط للمتغير س يرمز له بالرمز Δ س، ومحدد البسط للمتغير ص الرمز Δ ص، ومحدد البسط للمتغير ع الرمز Δ ع.

$$\therefore س = \frac{\Delta س}{\Delta} \quad ، \quad ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} \quad ، \quad ع = \frac{\Delta ع}{\Delta} \quad وهكذا...$$

مثال (٣):

باستخدام المحددات أوجد قيمة س، ص التى تحقق المعادلتين:

$$٢س - ٣ص = -٥$$

$$٣ س + ص = ٩$$

الحـــل

$$س = \frac{\Delta س}{\Delta} \qquad ص = \frac{\Delta ص}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٢ + ٩ = ١١$$

$$\Delta س = \begin{vmatrix} -٥ & -٣ \\ ٩ & ١ \end{vmatrix} = -٥ + ٢٧ = ٢٢$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٢٢}{١١} = ٢$$

$$\Delta \text{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & -٥ \\ ٣ & ٩ \end{vmatrix} = ١٨ + ١٥ = ٣٣$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{٣٣}{١١} = ٣$$

ويمكن التأكد من صحة الحل بالتعويض فى المعادلة الأولى بقيمة س، ص:

الطرف الأيمن = ٢ (٢) – ٣ (٣) = ٤ – ٩ = -٥ = الطرف الأيسر

مثال (٤):

باستخدام المحددات أوجد قيمة س، ص، ع التى تحقق المعادلات:

٢س + ص + ع = ٧

٣س – ص + ٢ع = ٩

س + ٣ ص – ع = ٣

الحل

$$\text{س} = \frac{\Delta \text{س}}{\Delta} \qquad \text{ص} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta} \qquad \text{ع} = \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ١ & ٣ & -١ \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} = ٢ \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix}$$

= ٢ (١ – ٦) – ٣ (-١ – ٣) + ١ (٢+١)

= ٢ (-٥) – ٣ (-٤) + ١ (٣)

= -١٠ + ١٢ + ٣ = ٥

$$\Delta \text{س} = \begin{vmatrix} ٧ & ١ & ١ \\ ٩ & -١ & ٢ \\ ٣ & ٣ & -١ \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} = ٧ \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} - ٩ \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$$

= ٧ (١ – ٦) – ٩ (-١-٣) + ٣(٢ + ١)

= ٧ (-٥) -٩ (-٤) + ٣ (٣)

= -٣٥ + ٣٦ + ٩ = ١٠

$$\therefore \text{س} = \frac{١٠}{٥} = ٢$$

$$\Delta \text{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٧ & ١ \\ ٣ & ٩ & ٢ \\ ١ & ٣ & -١ \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٩ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٧ & ١ \\ ٩ & ٢ \end{vmatrix}$$

= ٢ (-٩ – ٦) -٣ (-٧ – ٣) + ١ (١٤-٩)

= ٢ (-١٥) – ٣(-١٠) + ١ (٥)

= -٣٠ + ٣٠ + ٥ = ٥

$$\therefore \text{ص} = \frac{٥}{٥} = ١$$

$$\Delta \text{ع} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٧ \\ ٣ & -١ & ٩ \\ ١ & ٣ & ٣ \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} = ٢ \begin{vmatrix} -١ & ٩ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ١ & ٧ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ٧ \\ -١ & ٩ \end{vmatrix}$$

= ٢ (-٣ – ٢٧) – ٣(٣-٢١) + ١ (٩ + ٧)

= ٢ (-٣٠) – ٣(-١٨) + ١ (١٦)

= -٦٠ + ٥٤ + ١٦ = ١٠

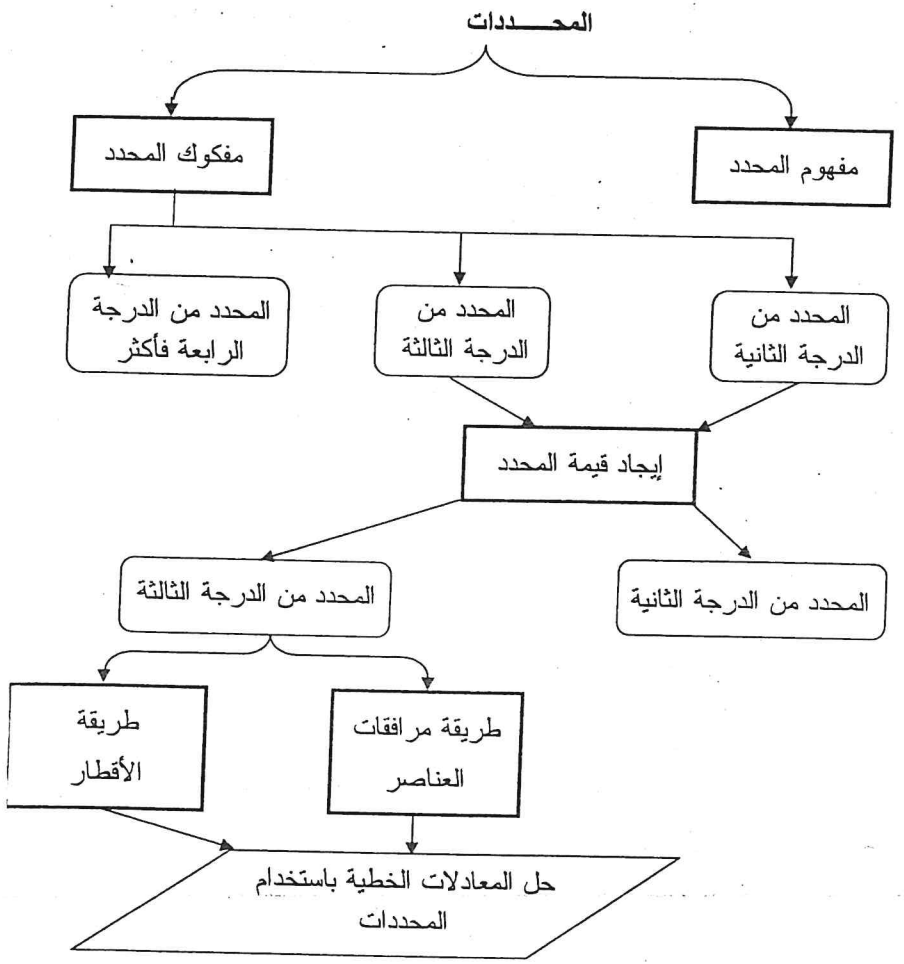
∴ ع = $\frac{١٠}{٥}$ = ٢

للتحقق من صحة الحل نقوم بالتعويض فى المعادلة الأولى بقيمة س، ص، ع

٢س + ص + ع = ٧

الطرف الأيمن = ٢ (٢) + ١ + ٢ = ٧ = الطرف الأيسر

٦- الخلاصة



٧- تمـــاريـــن

١- أوجد قيمة المحددات التالية:

$$\begin{vmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٦ & -٥ \\ ١٢ & ٣ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} -٣ & ٩ \\ -٥ & ٤ \end{vmatrix}$$

٢- أوجد قيمة المحددات التالية:

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٠ & ١٢ \\ ١ & ٦ & ٢ \\ ٥ & ٧ & ١ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} -٣ & ٩ & ٠ \\ ٦ & ١٨ & ١٢ \\ ١ & ٠ & -٥ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٥ & ٦ & -١ \\ -١٠ & ٦ & ٢ \\ ١٥ & ٩ & -٢٧ \end{vmatrix}$$

٣- أوجد قيمة كل من س، ص فى المعادلات التالية باستخدام المحددات:

س + ٢ ص = ٢

٣س – ٥ص = -٢٧

$$\begin{bmatrix} س = -٤ \\ ص = ٣ \end{bmatrix}$$

٢س – ص = -٨

س – ٧ص = ٩

$$\begin{bmatrix} س = -٥ \\ ص = -٢ \end{bmatrix}$$

٥س – ص = -٣٢

٣ص – س = -٢

$$\begin{bmatrix} س = -٧ \\ ص = -٣ \end{bmatrix}$$

٤- أوجد قيمة كل من س، ص، ع فى المعادلات التالية باستخدام المحددات:

س – ص + ع = ٤

٢س + ص – ٣ع = -٥

س – ٣ص + ٥ع = ١٤

$$\begin{bmatrix} س = ١ \\ ص = -١ \\ ع = ٢ \end{bmatrix}$$

س + ص – ٢ع = ١١

ص + ع = ١

س - ص = ١

$$\begin{bmatrix} س = ٤ \\ ص = ٣ \\ ع = -٢ \end{bmatrix}$$

٨- نموذج إجابة

تمرين (١):

س + ٢ص = ٢

٣س – ٥ص = -٢٧

$$\text{س} = \frac{\Delta\,\text{س}}{\Delta} \qquad \text{ص} = \frac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix} = ٥ - ٦ = -١١$$

$$\Delta\,\text{س} = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ -٢٧ & -٥ \end{vmatrix} = ١٠ + ٥٤ = ٤٤$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٤٤}{-١١} = -٤$$

$$\Delta\,\text{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -٢٧ \end{vmatrix} = -٢٧ - ٦ = -٣٣$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{-٣٣}{-١١} = ٣$$

للتأكد من صحة الحل:

بالتعويض فى المعادلة الأولى: س + ٢ص = ٢

الطرف الأيمن = -٤ + ٢ (-٣) = ٤ + ٦ = ٢

= الطرف الأيسر

الوحدة السادسة
المصفوفات

المصفوفة Matrix عبارة عن مجموعة من العناصر المرتبة فى شكل صفوف وأعمدة وهذه العناصر موضوعة بين قوسين إما فى صورة [ ] أو فى صورة ( ) ولا يشترط أن يتساوى عدد الصفوف مع عدد الأعمدة.

فالمصفوفة $أ_{م/ن}$ والتى تتكون من م من الصفوف، ون من الأعمدة تكتب على الصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & \cdots & أ_{١ن} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & \cdots & أ_{٢ن} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & \cdots & أ_{٣ن} \\ أ_{م١} & أ_{م٢} & \cdots & أ_{م ن} \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & \cdots & أ_{١ن} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & \cdots & أ_{٢ن} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & \cdots & أ_{٣ن} \\ أ_{م١} & أ_{م٢} & \cdots & أ_{م ن} \end{pmatrix}$$

١- أنواع المصفوفات:

هناك أنواع من المصفوفات وسنكتفى بذكر أهمها:

١/١ المصفوفة المربعة:

وهى التى يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة مثل:

$$أ_{٢/٢} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٥ & ٤ \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad أ_{٣/٣} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ -١ & -٢ & ١ \end{bmatrix} \quad \text{وهكذا}$$

٢/١ المصفوفة الصفرية:

وهى ألتى يكون جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز [أ]' مثل:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{matrix}$$ وهكذا

ولا يشترط أن تكون المصفوفة الصفرية مربعة، كما أن جمع المصفوفة الصفرية على أى مصفوفة من نفس الرتبة أو العكس لا يغير من عناصر المصفوفة الأصلية.

أى أن [أ] + [أ]' = [أ]' + [أ] = [أ]

٣/١- مصفوفة الوحدة أو الواحد الصحيح:

وهى مصفوفة مربعة كل عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسى فقيمتها واحد صحيح ويرمز لها بالرمز I .

مثل $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ وهكذا

وتنتج مصفوفة الوحدة من حاصل ضرب أى مصفوفة فى مقلوبها (أو معكوسها) كما سنرى لاحقاً.

٤/١ المصفوفة المبدلة (أو المدورة أو المحركة) Transpose matrix

وهى المصفوفة الناتجة عن تبديل صفوف المصفوفة بأعمدتها أو تبديل أعمدة المصفوفة بصفوفها وسوف نرمز لها بالرمز $\overleftarrow{[\text{أ}]}$ فمثلاً إذا كانت:

$$[\text{أ}] = \begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} \text{ فإن } \overleftarrow{[\text{أ}]} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}$$

وكذلك إذا كانت $[\text{أ}] = \begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٢ & ١ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ فإن $\overleftarrow{[\text{أ}]} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٦ \\ ٣- & ١ & ٤ \end{bmatrix}$

يلاحظ أن المصفوفة من الرتبة (٣ × ٢) عند تدويرها تصبح من الرتبة (٢ × ٣) أى أن تدوير المصفوفة يصحبه تدوير فى رتبتها.

٥/١ مصفوفة العمود الواحد (المتجه الرأسى) Column Vector

وهى مصفوفة مكونة من عمود واحد وأى عدد من الصفوف مثل:

$\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \\ ٥ \\ ٧- \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \\ ١- \\ ٤ \end{bmatrix}$ وهكذا

٦/١ مصفوفة الصف الواحد (المتجه الأفقى) Row Vector

وهى مصفوفة مكونة من صف واحد وأى عدد من الأعمدة مثل:

[٣ -١] أو [٣ ٥ -٤] أو [٢ -١ ٣ ٦] وهكذا

٧/١ مصفوفة العنصر الواحد:

وهى المصفوفة التى تحتوى على صف واحد وعمود واحد أيضاً أى تأخذ الشكل التالى [أ١١] مثل [٥] أو [- ٧] وهكذا

٢- العمليات الرياضية على المصفوفات:

ويقصد بها عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة التى تتم على المصفوفات والشروط الخاصة بكل عملية وطريقة إجرائها وناتج كل عملية منها.

١/٢ جمع وطرح المصفوفات:

الشرط: لكى نجمع أو نطرح مصفوفتين لابد أن تكون المصفوفتان من نفس الرتبة.

الطريقة: يتم جمع أو طرح كل عنصرين متناظرين أى لهما نفس الموقع من حيث ترتيب الأعمدة والصفوف.

النتيجة: المصفوفة الناتجة عن الجمع أو الطرح يكون لها نفس رتبة المصفوفتين.

مثال (١):

إذا كان لدينا المصفوفتان أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ٤ \\ ٥ & ١- & ٦ \end{bmatrix}$

ب = $\begin{bmatrix} ٣- & ٤ & ١- \\ ٢- & ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

أوجد أ + ب ، ب + أ ، أ – ب ، ب - أ

الحـــل

أ + ب = $\begin{bmatrix} ١- & ١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٨ \end{bmatrix}$ ب + أ = $\begin{bmatrix} ١- & ١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٨ \end{bmatrix}$

أ - ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٧- & ٥ \\ ٧ & ٤- & ٤ \end{bmatrix}$ ب - أ = $\begin{bmatrix} ٥- & ٧ & ٥- \\ ٧- & ٤ & ٤- \end{bmatrix}$

ومعنى ذلك أن أ + ب = ب + أ

، أ – ب = ب – أ بإشارات مختلفة

أى أن أ – ب = - (ب – أ)

٢/٢ ضرب المصفوفات:

الشرط: لكى نضرب مصفوفتين لابد أن يكون عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية.

الطريقة: يتم ضرب صفوف الأولى × أعمدة الثانية، بحيث يضرب كل صف من صفوف الأولى × كافة أعمدة الثانية، علماً بأن حاصل ضرب صف من الأولى × عمود من الثانية = عنصر واحد.

النتيجة: المصفوفة الناتجة عن الضرب يكون عدد صفوفها = عدد صفوف الأولى وعدد أعمدتها = عدد أعمدة الثانية

فمثلاً حاصل ضرب $\begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} & ب_{٣١} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} & ب_{٣٢} \\ ب_{١٣} & ب_{٢٣} & ب_{٣٣} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (أ_{١١}ب_{١١}+أ_{٢١}ب_{١٢}+أ_{٣١}ب_{١٣}) & (أ_{١١}ب_{٢١}+أ_{٢١}ب_{٢٢}+أ_{٣١}ب_{٢٣}) & (أ_{١١}ب_{٣١}+أ_{٢١}ب_{٣٢}+أ_{٣١}ب_{٣٣}) \\ (أ_{١٢}ب_{١١}+أ_{٢٢}ب_{١٢}+أ_{٣٢}ب_{١٣}) & (أ_{١٢}ب_{٢١}+أ_{٢٢}ب_{٢٢}+أ_{٣٢}ب_{٢٣}) & (أ_{١٢}ب_{٣١}+أ_{٢٢}ب_{٣٢}+أ_{٣٢}ب_{٣٣}) \\ (أ_{١٣}ب_{١١}+أ_{٢٣}ب_{١٢}+أ_{٣٣}ب_{١٣}) & (أ_{١٣}ب_{٢١}+أ_{٢٣}ب_{٢٢}+أ_{٣٣}ب_{٢٣}) & (أ_{١٣}ب_{٣١}+أ_{٢٣}ب_{٣٢}+أ_{٣٣}ب_{٣٣}) \end{bmatrix}$$

مثال (٢):

إذا كان لدينا المصفوفتين أ= $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب= $\begin{bmatrix} ٣ & ١- & ٤ \\ ٢- & ١ & ٦ \end{bmatrix}$

أوجد حاصل ضرب أ × ب ، ب × أ

الحـــل

أ × ب يتوافر فيها شرط الضرب حيث أن أعمدة الأولى=٢ وصفوف الثانية =٢

أ × ب = $\begin{bmatrix} (٢\times٣ - ٣\times٢-) & (٢\times٣ - ١\times٢-) & (٢\times٤ - ٣\times٦) \\ (٥\times٣ + ١\times٢-) & (٥\times١ + ١\times٢-) & (٥\times٤ + ١\times٦) \end{bmatrix}$

أ × ب = $\begin{bmatrix} ١٢ & ٥- & ١٠- \\ ١٣ & ٤- & ٢٦ \end{bmatrix}$

ب × أ لا يتوافر فيها شرط الضرب حيث أن أعمدة الأولى = ٣

وصفوف الثانية = ٢

مثال (٣):

أوجد حاصل ضرب $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١- \\ ٣ \end{bmatrix}$

الحـل

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١- \\ ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٢\times١-٣\times٣) \\ (٥\times١-٤\times٣) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١- \\ ٧ \end{bmatrix}$$

مثال (٤):

أوجد حاصل ضرب $[٢ \quad ٣-] \times \begin{bmatrix} ٢ & ٥- & ١ \\ ٣ & ٤ & ٢- \end{bmatrix}$

الحـل

$$[٢ \quad ٣-] \times \begin{bmatrix} ٢ & ٥- & ١ \\ ٣ & ٤ & ٢- \end{bmatrix} = [(٢\times٢-٣\times٣)(٢\times٥-٣\times٤)(٢\times١-٣\times٢-)]$$

$$= [٥- \quad ٢٢- \quad ٨]$$

مثال (٥):

أوجد حاصل ضرب $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣- \\ ٥ \end{bmatrix} \times [٤ \quad ١-]$

الحـل

$$\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣- \\ ٥ \end{bmatrix} \times [٤ \quad ١-] = \begin{bmatrix} ٨ & ٢- \\ ١٢- & ٣ \\ ٢٠ & ٥- \end{bmatrix}$$

٢/٣/٢ ضرب متجه أفقى × متجه رأسى:

يشترط لضرب المتجهين أن يكون عدد عناصرهما متساوياً وذلك حتى يتوافر شرط تساوى عدد أعمدة الأول مع عدد صفوف الثانى.

وناتج الضرب يكون مصفوفة العنصر الواحد دائماً.

فمثلا $[أ_١ \quad أ_٢ \quad أ_٣] \begin{bmatrix} ب_١ \\ ب_٢ \\ ب_٣ \end{bmatrix} = [(أ_١ ب_١ + أ_٢ ب_٢ + أ_٣ ب_٣)]$

مثال (٦):

أوجد حاصل ضرب $[٢ \quad ٢- \quad ٤] \times \begin{bmatrix} ١ \\ ٥ \\ ٣- \end{bmatrix}$

الحـل

$$[٢ \quad ٣- \quad ٤] \times \begin{bmatrix} ١ \\ ٥ \\ ٣- \end{bmatrix} = [(٢\times١ - ٣\times٥ + ٤ \times ٣-)] = [٢٥-]$$

٣/٢ قسمة المصفوفات:

إذا كان لدينا المصفوفتين أ، ب وكان المطلوب إيجاد خارج قسمة أ ÷ ب فإنه لا يمكن إجراء عمليات القسمة العادية بل يتم تحويل عملية القسمة إلى عملية ضرب حيث:

أن $\text{أ} \div \text{ب} = \text{أ} \times \frac{١}{\text{ب}} = \text{أ} \times \text{ب}^{-١}$

ويطلق على الشكل [ب]$^{-١}$ مقلوب المصفوفة ب، والمصفوفة لكى يكون لها مقلوب لابد أن تكون مربعة.

٤/٢ طرق إيجاد مقلوب المصفوفة:

١/٤/٢ طريقة مرافقات العناصر:

وتعتمد هذه الطريقة على طريقة المحددات فى إيجاد مقلوب المصفوفة وتتلخص خطواتها فى الآتى:

١/١/٥/٢ نحول المصفوفة إلى محدد ونوجد قيمته.

٢/١/٥/٢ نوجد مصفوفة مرافقات العناصر (سبق التعرف على مرافقات العناصر عند دراسة المحددات).

٣/١/٥/٢ نوجد المصفوفة المبدلة وهى عبارة عن مصفوفة المرافقات بعد تبديل الأعمدة والصفوف لأماكنها.

٤/١/٥/٢ نوجد مقلوب المصفوفة: بقسمة كل عنصر من عناصر المصفوفة المبدلة ÷ قيمة محدد المصفوفة المحسوب فى الخطوة الأولى (١/١/٥/٢) أو بضرب

المصفوفة المبدلة × $\frac{١}{\text{قيمة محدد المصفوفة}}$

$$[\text{أ}]^{-١} = [\overleftarrow{\text{أ}}] \times \frac{١}{\Delta}$$

ملاحظات:

١- يشترط لإيجاد مقلوب المصفوفة ألا تكون قيمة محدد المصفوفة = صفر

٢- أى مصفوفة × مقلوبها = مصفوفة الوحدة من نفس الرتبة.

$$[\text{أ}] \times [\text{أ}]^{-١} = [I]$$

مثال (٧)

أوجد مقلوب المصفوفة التالية $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٤ & ٣- \end{bmatrix}$

الحـل

١- محدد المصفوفة = $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٤ & ٣- \end{vmatrix} = ٨ + ١٥ = ٢٣$

٢- مصفوفة المرافقات = $\begin{bmatrix} (٣-) - & (٤) + \\ (٢) + & (٥) - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥- \end{bmatrix}$

٣- المصفوفة المبدلة = $\begin{bmatrix} ٥- & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

$$= \frac{١}{٢٣} \times \begin{bmatrix} ٥- & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

٤- مقلوب المصفوفة = $\begin{bmatrix} \frac{٥-}{٢٣} & \frac{٤}{٢٣} \\ \frac{٢}{٢٣} & \frac{٣}{٢٣} \end{bmatrix}$

للتأكد من صحة الحل:

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٤ & ٣- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{٥-}{٢٣} & \frac{٤}{٢٣} \\ \frac{٢}{٢٣} & \frac{٣}{٢٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١٠+١٠-}{٢٣} & \frac{١٥+٨}{٢٣} \\ \frac{٨+١٥}{٢٣} & \frac{١٢+١٢-}{٢٣} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{٢٣}{٢٣} & \frac{٠}{٢٣} \\ \frac{٠}{٢٣} & \frac{٢٣}{٢٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

مثال (٨):

أوجد مقلوب المصفوفة التالية $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ -٣ & ١ & -١ \\ ٥ & -٢ & ٦ \end{bmatrix}$

الحل

١- محدد المصفوفة:

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ -٣ & ١ & -١ \\ ٥ & -٢ & ٦ \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} = ٢ \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ -٢ & ٦ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ -٢ & ٦ \end{vmatrix} + ٥ \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= ٢\,(٦ - ٢) + ٣\,(٢٤ + ٦) + ٥\,(-٤ - ٣)$$

$$= ٢\,(٤) + ٣\,(٣٠) + ٥\,(-٧)$$

$$= ٨ + ٩٠ - ٣٥ = ٦٣$$

٢- مصفوفة المرافقات:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ -٢ & ٦ \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} -٣ & -١ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{vmatrix} + \\ \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ -٢ & ٦ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ \end{vmatrix} - \\ \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ -٣ & -١ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٣ & ١ \\ -٣٠ & -٣ & ٢٤ \\ -٧ & -٧ & ١٤ \end{bmatrix}$$

٣- المصفوفة المبدلة:

$$\begin{bmatrix} ٤ & -٣٠ & -٧ \\ ١٣ & -٣ & -٧ \\ ١ & ٢٤ & ١٤ \end{bmatrix}$$

٤- مقلوب المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} \frac{٤}{٦٣} & \frac{-٣٠}{٦٣} & \frac{-٧}{٦٣} \\ \frac{١٣}{٦٣} & \frac{-٣}{٦٣} & \frac{-٧}{٦٣} \\ \frac{١}{٦٣} & \frac{٢٤}{٦٣} & \frac{١٤}{٦٣} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{٤}{٦٣} & \frac{-٣٠}{٦٣} & \frac{-٧}{٦٣} \\ \frac{١٣}{٦٣} & \frac{-٣}{٦٣} & \frac{-٧}{٦٣} \\ \frac{١}{٦٣} & \frac{٢٤}{٦٣} & \frac{١٤}{٦٣} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ -٣ & ١ & -١ \\ ٥ & -٢ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{٨+٥٢+٣}{٦٣} & \frac{-٦٠-١٢+٧٢}{٦٣} & \frac{-١٤-٢٨+٥٢}{٦٣} \\ \frac{-١٢+١٣-١}{٦٣} & \frac{-٩-٣-٢٤}{٦٣} & \frac{٢١-٧-١٤}{٦٣} \\ \frac{٢٠-٢٦+٦}{٦٣} & \frac{-١٥٠+٦+١٤٤}{٦٣} & \frac{-٣٥+١٤+٨٤}{٦٣} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{٦٣}{٦٣} & \frac{٠}{٦٣} & \frac{٠}{٦٣} \\ \frac{٠}{٦٣} & \frac{٦٣}{٦٣} & \frac{٠}{٦٣} \\ \frac{٠}{٦٣} & \frac{٠}{٦٣} & \frac{٦٣}{٦٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

٣- حل المعادلات باستخدام المصفوفات:

إذا كان لدينا المعادلتين:

$أ_١ س + ب_١ ص = م_١$

$أ_٢ س + ب_٢ ص = م_٢$

والمطلوب إيجاد قيمة س، ص التى تحقق المعادلتين.

فإنه باستخدام المصفوفات يمكن وضع هاتين المعادلتين على الصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} م_١ \\ م_٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} م_١ \\ م_٢ \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{bmatrix}}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{bmatrix}^{-١} \times \begin{bmatrix} م_١ \\ م_٢ \end{bmatrix}$$

وبالمثل إذا كان لدينا المعادلات:

$أ_١ س + ب_١ ص + جـ_١ ع = م_١$

$أ_٢ س + ب_٢ ص + جـ_٢ ع = م_٢$

$أ_٣ س + ب_٣ ص + جـ_٣ ع = م_٣$

فإن

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{bmatrix}^{-١} \times \begin{bmatrix} م_١ \\ م_٢ \\ م_٣ \end{bmatrix}$$

أى أن حل المعادلات باستخدام المصفوفات يعتمد على إيجاد مقلوب مصفوفة معاملات العناصر ثم ضربها × متجه رأسى من الحدود المطلقة.

مثال (٩)

باستخدام المصفوفات حل المعادلتين التاليتين:

٢س -٢ = ٨

س – ٧ص = ٩

الحـــل

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & - \\ ١ & ٧- \end{bmatrix}^{-١} \times \begin{bmatrix} ١٣- \\ ٩ \end{bmatrix}$$

إيجاد مقلوب المصفوفة

١- محدد المصفوفة = $\begin{vmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٧- \end{vmatrix}$ = -١٤ + ١ = -١٣

٢- مصفوفة المرافقات: $\begin{bmatrix} + (٧-) & -(١) \\ -(١-) & +(٢) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧- & ١- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

٣- المصفوفة المبدلة: $\begin{bmatrix} ٧- & ١ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$

٤- مقلوب المصفوفة = $\frac{١}{-١٣} \times \begin{bmatrix} -٧ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-١}{١٣} & \frac{٧}{١٣} \\ \frac{-٢}{١٣} & \frac{١}{١٣} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{١٣} & \frac{٧}{١٣} \\ \frac{-٢}{١٣} & \frac{١}{١٣} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٨ \\ ٩ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-٦ - ٩}{١٣} \\ \frac{-٨ - ١٨}{١٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-٦٥}{١٣} \\ \frac{-٢٦}{١٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ \\ -٢ \end{bmatrix}$$

∴ س = -٥ ص = -٢

مثال (١٠):

باستخدام المصفوفات حل المعادلات التالية:

٢س + ص + ع = ٧

٣س – ص + ٢ ع = ٩

س + ٣ص – ع = ٣

الحـل

أولاً: الحل باستخدام مصفوفة المرافقات:

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ١ & ٣ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٧ \\ ٩ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

إيجاد مقلوب المصفوفة:

١- محدد المصفوفة:

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ١ & ٣ & -١ \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} = ٢ \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٢ (١ - ٦) - ٣ (-١ - ٣) + ١ (٢ + ١)$$

$$= -١٠ + ١٢ + ٣ = ٥$$

$$\begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \\ - \end{matrix} \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \\ - \end{matrix} \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ١ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \\ - \end{matrix} \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} +(٦-١) & -(-٣-٢) & +(٩+١) \\ -(-١-٣) & +(-٢-١) & -(٦-١) \\ +(٢+١) & -(٤-٣) & +(-٢-٣) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ & ٥ & ١٠ \\ ٤ & -٣ & -٥ \\ ٣ & -١ & -٥ \end{bmatrix}$$

٣- المصفوفة المبدلة:

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٥- \\ ١- & ٣- & ٥ \\ ٥- & ٥- & ١٠ \end{bmatrix}$$

٤- مقلوب المصفوفة:

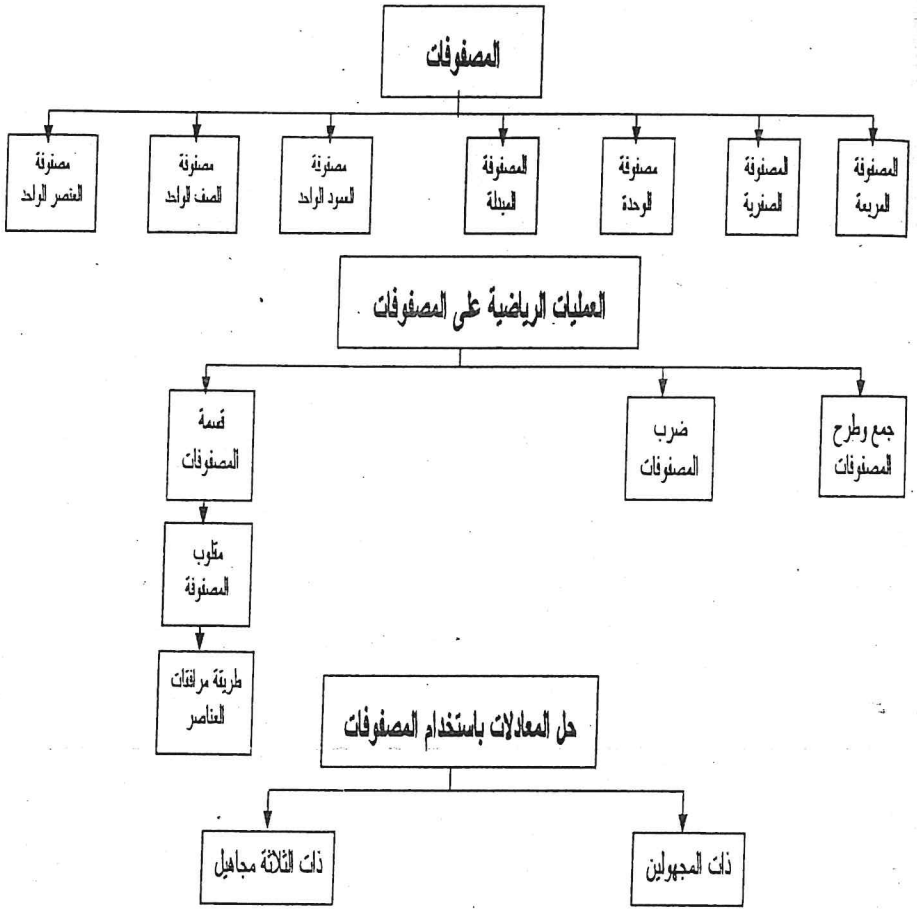
$$\begin{bmatrix} \frac{٣}{٥} & \frac{٤}{٥} & ١- \\ \frac{١-}{٥} & \frac{٣-}{٥} & ١ \\ ١- & ١- & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٥} & \frac{٤}{٥} & ١- \\ \frac{١-}{٥} & \frac{٣-}{٥} & ١ \\ ١- & ١- & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٧ \\ ٩ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{٩}{٥} + \frac{٣٦}{٥} + ٧- \\ \frac{٣}{٥} - \frac{٢٧}{٥} - ٧ \\ (١٤ - ٩ - ٣) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

∴ س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ٢

٤- الخلاصة



٥- تمـــاريـــن

١- أوجد قيمة كل مما يأتي:

(أ) $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٠ \\ -٥ & ٧ & -٨ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ٧ & -٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & -٦ \\ -٣ & ٤ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

(د) $-٥ \begin{bmatrix} ٢ & ٤ & -٦ \\ ٢ & ٣ & ٧ \\ -٧ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} - ٣ \begin{bmatrix} -٣ & ٥ & -٤ \\ ٦ & ٧ & -١ \\ ٧ & -٥ & ٢ \end{bmatrix}$

(هـ) $-٣ \begin{bmatrix} ٢ & ٧ & ٤ \\ -٥ & ٦ & -٥ \\ -١ & ٠ & ٣ \end{bmatrix} + ٤ \begin{bmatrix} ٤ & ٠ & -٣ \\ -٥ & ٣ & ١ \\ ٦ & ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

٢- أوجد حاصل ضرب ما يلي:

أ) $٧ \times [٤ \quad ٥ \quad -٣ \quad ٦]$

ب) $١٢ \times \begin{bmatrix} ٣ & -٤ & ٦ & ٢ \\ -١ & ٠ & ١ & ٧ \end{bmatrix}$

جـ) $[٢ \quad ٥ \quad -٣] \times \begin{bmatrix} ٤ \\ -٢ \\ ١ \end{bmatrix}$

د) $[٢ \quad ٤ \quad -١] \times \begin{bmatrix} ٥ & -٣ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ٦ \\ ١ & ٠ & -٥ \end{bmatrix}$

هـ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & -٣ \\ ١ & ٠ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ -٤ \\ ٢ \end{bmatrix}$

و) $\begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ ٥ & ٢ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٤ & -٣ & ٦ \\ ١ & -٥ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$

٣- أوجد حاصل ضرب ما يلي:

أ) $\begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ & ٢ \\ ١ & ٤ & -٣ \\ -٦ & ١ & ٧ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ٠ & -٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

٤- أوجد مقلوب المصفوفات التالية:

أ) $\begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٢ & -٥ & ٤ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ ٦ & ١ & ٥ \end{bmatrix}$

٥- حل المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات:

أ- ٢س + ص = ٧

س - ٥ص = -١٣

$\begin{pmatrix} س = ٢ \\ ص = ٣ \end{pmatrix}$

ب- س - ص = ٣
٢س + ٢ = ٩

$$\begin{cases} س = ٤ \\ ص = ١ \end{cases}$$

هـ- س + ص - ع = -١
٢س + ص + ع = ٩
٣س - ٢ص + ٢ع = ١٢

$$\begin{cases} س = ٣ \\ ص = ١ \\ ع = ٤ \end{cases}$$

ز- ٣س + ص - ع = ١٠
٢ص - س - ٣ع = -٢
٣ع - ٢س = -٣

$$\begin{cases} س = ٣ \\ ص = ٢ \\ ع = ١ \end{cases}$$

٦- نموذج إجابة

تمرين (١):

(د) $-٥ \begin{bmatrix} ٢ & ٤ & -٦ \\ ٢ & ٣ & ٧ \\ -٧ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} - ٣ \begin{bmatrix} -٣ & ٥ & -٤ \\ ٦ & ٧ & -١ \\ ٧ & -٥ & ٢ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -١٠ & -٢٠ & ٣٠ \\ -١٠ & -١٥ & -٣٥ \\ ٣٥ & -٢٠ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٩ & ١٥ & -١٢ \\ ١٨ & ٢١ & -٣ \\ ٢١ & -١٥ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -١ & -٣٥ & ٤٢ \\ -٢٨ & -٣٦ & -٣٢ \\ ١٤ & -٥ & -٦ \end{bmatrix}$$

تمرين (٢):

(جـ) $[٢ \quad ٥ \quad -٣] \times \begin{bmatrix} ٤ \\ -٢ \\ ١ \end{bmatrix}$

$= [٢\times٤ - ٥\times-٢ - ٣\times١] = [٨ - ١٠ - ٣] = [(-٨-١٣)] = [-٥]$

هـ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & -٣ \\ ١ & ٠ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ -٤ \\ ٢ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (٢\times٥ + ٤\times-٤ - ٣\times٢) \\ (١\times٥ + ٠\times-٤ + ٢\times٢) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (١٠-١٦-٦) \\ (٥ + ٠ + ٤) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$$

الوحدة السابعة

الدوال Functions

١- تعريف الدالة:

تعرف الدالة بأنها أداة رياضية للتعبير عن العلاقة بين الظواهر محل الدراسة، فعند دراسة أية ظاهرة قابلة للتغير مثل الكمية المطلوبة من سلعة معينة أو سعر سلعة معينة أو حجم الإنتاج من سلعة معينة أو تكاليف الإنتاج أو حجم الاستهلاك أو الادخار أو الاستثمار أو ... كل هذه الظواهر يمكن التعبير عنها (رقمياً) وهذه القيم، التى تأخذها الظاهرة، قابلة للتغير، ومن ثم يطلق على الظاهرة لفظ (متغير) Variable، أما عكس ذلك فيطلق عليه الثابت Constant وهو كل قيمة تبقى على ما هى عليه دون تغير مثل:

ط = $\frac{٢٢}{٧}$ ، هـ أساس اللوغاريتم الطبيعى = ٢,٧١٨٣

٢- تمثيل الدالة بيانياً:

يستخدم الرسم البيانى للتعبير عن القيم الرقمية التى تأخذها الدالة بهدف تسهيل فهم وإدراك ما تدل عليه هذه القيم. وعند إعداد الرسم البيانى للدالة يجب مراعاة ما يلى:

١- تخصيص المحور الأفقى لقيم المتغير المستقل.

٢- تخصيص المحور الرأسى لقيم المتغير التابع.

٣- نقطة تقاطع المحورين تسمى نقطة الأصل وقيمة كل متغير عندها=صفر.

٤- قيم المتغير المستقل الموجب تمثل على يمين نقطة الأصل والقيم السالبة على يسارها.

٥- قيم المتغير التابع الموجبة تمثل أعلى نقطة الأصل والقيم السالبة أسفلها.

٦- نحدد مقياس مناسب للرسم بحيث يتفق مع القيم الكبيرة والصغيرة فى المتغيرين، علماً بأنه يمكن أن يكون للمتغيرين مقياس رسم واحد أو أن يكون لكل منهما مقياس رسم مختلف.

٧- عند رسم الدالة نعوض عن قيم المتغير المستقل بأى قيم نختارها وإن كان من الأفضل أن تتضمن قيماً سالبة وأخرى موجبة ثم نستنتج قيم المتغير التابع المناظرة.

٨- كل قيمتين متقابلتين للمتغيرين س، ص نمثلهما على الرسم البيانى بنقطة لها إحداثيان: الإحداثى السينى وهى القيمة التى يأخذها المتغير المستقل (س) على محور س، والإحداثى الصادى وهى القيمة التى يأخذها المتغير التابع (ص) على محور ص. ويذكر الإحداثى السينى للنقطة دائماً قبل الإحداثى الصادى.

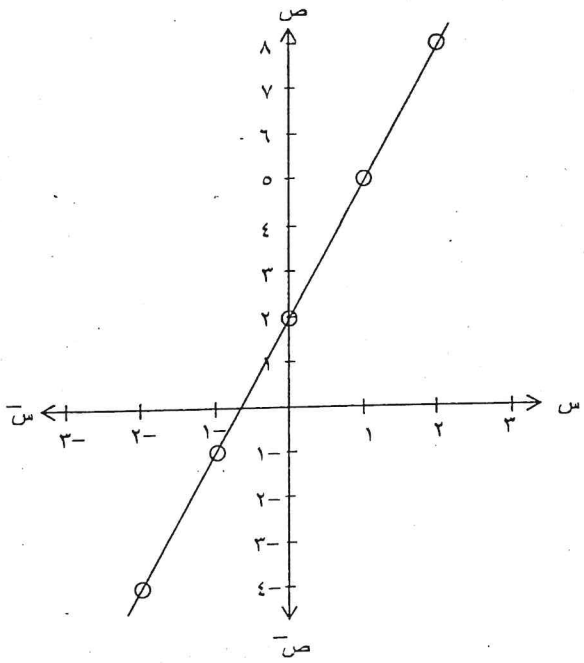
٩- يتم توصيل النقط حسب اتجاهها العام، فإذا كان اتجاهها العام مستقيماً يتم توصيلها بخط مستقيم، وإن كان اتجاهها العام منحنى توصل بخط ممهد.

مثال (١):

ارسم الدالة ص = ٣س + ٢

الحل

س	ص = ٣س + ٢	ص
-٢	٣×-٢ + ٢	-٤
-١	٣× - ١ + ٢	-١
صفر	٣ × ٠ + ٢	٢
١	٣× ١ + ٢	٥
٢	٣ × ٢ + ٢	٨

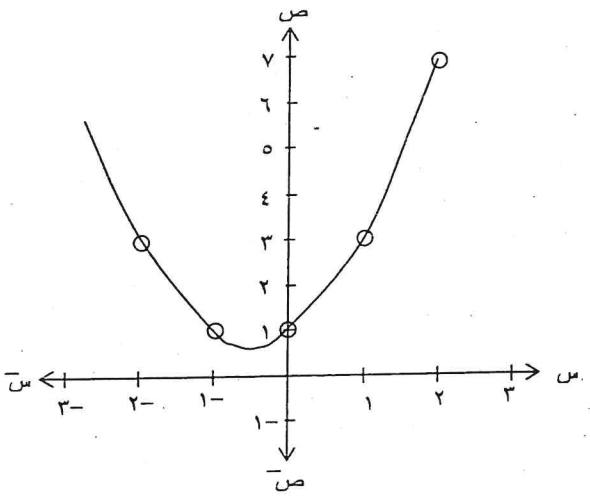


مثال (٢):

ارسم الدالة: ص = س^{٢} + س + ١

الحل

س	ص = س^{٢} + س + ١	ص
-٢	(-٢)^{٢} + (-٢) + ١	٣
-١	(-١)^{٢} + (-١) + ١	١
صفر	(٠)^{٢} + (٠) + ١	١
١	(١)^{٢} + (١) + ١	٣
٢	(٢)^{٢} + (٢) + ١	٧



مثال (٣):

باستخدام الرسم البيانى أوجد نقطة تقاطع الدالتين:

ص = ٣س ـ ٤

ص = س + ٢

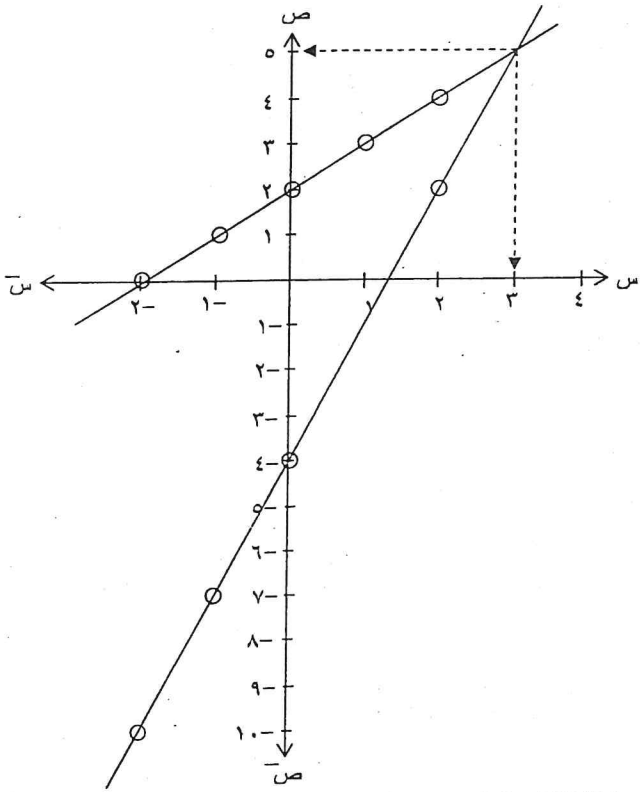
الحـل

الدالة الأولى:

س	ص = ٣س -٤	ص
-٢	٣(-٢)-٤	-١٠
-١	٣(-١)-٤	-٧
صفر	٣(٠) - ٤	-٤
١	٣(١) - ٤	-١
٢	٤(٢) ـ ٤	٢

الدالة الثانية:

س	ص = س + ٢	ص
-٢	-٢ + ٢	٠
-١	-١ + ٢	١
صفر	٠ + ٢	٢
١	١ + ٢	٣
٢	٢ + ٢	٤



∴ نقطة تقاطع الدالتين هى (٣، ٥)

٣- طرق إيجاد الدوال:

لاشك أن الدالة فى صورتها العامة ص = د(س) أو ص = د(س، ع، ل، ....) لا تعطى شكل العلاقة الجبرية التى تحدد قيمة المتغير التابع إذا تحددت قيمة المتغير المستقل أو قيم المتغيرات المستقلة.

ولكن كيف نحدد ثوابت المعادلة التى تمثل العلاقة الدالية، بمعنى أوضح فى معادلة الدرجة الأولى ص = أس + ب كيف نحسب قيمة أ، ب وفى معادلة الدرجة الثانية ص = أس^{٢} + ب س + جـ

كيف نحدد قيمة أ، ب، جـ وهكذا.

١/٣ طريقة الفروق المتساوية:

١/١/٣٠ الدالة من الدرجة الأولى:

إذا كان لدينا مجموعة من أزواج القيم تمثل المتغيرين المستقل (س) والتابع (ص) فإن خطوات الحل تتحدد فى الآتى:

١- نوجد الفروق بين كل قيمتين متتاليتين للمتغير (س) ونطلق عليها فـ$_{س}$

حيث فـ$_{س}$ = س$_{ر+١}$ - س$_{ر}$

٢- نوجد الفروق بين كل قيمتين متتاليتين للمتغير (ص) ونطلق عليها فـ$_{ص}$

حيث فـ$_{ص}$ = ص$_{ر+١}$ - ص$_{ر}$

وهذا يعنى أن نطرح القيمة – السابقة لها.

٣- بقسمة الفروق فى ص ÷ الفروق فى س فنحصل على فـ$_{١}$ = $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$

فإن كان الناتج مقدار ثابت كانت المعادلة التى تمثل هذه القيم من الدرجة الأولى فى صورة: ص = أ س + ب

ولكى نحصل على صورة المعادلة يتم اختيار أى زوج من أزواج القيم التى تمثل المتغيرين ثم نعوض فى العلاقة:

ص = ص$_{ر}$ + فـ$_{١}$ (س – س$_{ر}$)

حيث س$_{ر}$، ص$_{ر}$ هو أى زوج من أزواج القيم وترتيبه (ر) مثلاً.

مثال (٤):

أوجد المعادلة التى تمثل العلاقة بين المتغيرين س، ص إذا كانت لديك القيم التالية:

س	٢	٣	٥	٧	١٠	١٥	٢٠
ص	١١	١٤	٢٠	٢٦	٣٥	٥٠	٦٥

الحـل

فروق س (فـ$_{س}$)	فروق ص (فـ$_{ص}$)	فـ$_{١}$ = $\frac{\text{فـ}_{ص}}{\text{فـ}_{س}}$
٣ – ٢ = ١	١٤ – ١١ = ٣	$\frac{٣}{١}$ = ٣
٥ – ٣ = ٢	٢٠ – ١٤ = ٦	$\frac{٦}{٢}$ = ٣
٧ – ٥ = ٢	٢٦ – ٢٠ = ٦	$\frac{٦}{٢}$ = ٣
١٠ – ٧ = ٣	٣٥ – ٢٦ = ٩	$\frac{٩}{٣}$ = ٣
١٥ – ١٠ = ٥	٥٠ – ٣٥ = ١٥	$\frac{١٥}{٥}$ = ٣
٢٠ – ١٥ = ٥	٦٥ – ٥٠ = ١٥	$\frac{١٥}{٥}$ = ٣

وحيث أن فـ$_{١}$ ثابتة لجميع الفروق المتتالية للمتغيرين، فإن معنى ذلك أن المعادلة التى تمثل هذه القيم من الدرجة الأولى فى صورة: ص = أ س + ب

ولإيجاد هذه المعادلة نأخذ أى زوج من أزواج القيم وليكن الأول حيث س = ٢، ص = ١١

ونعوض فى العلاقة:

ص = ص$_{ر}$ + ف$_{١}$ (س – س$_{ر}$)

= ١١ + ٣ (س – ٢)

= ١١ + ٣س – ٦

∴ ص = ٣ س + ٥

٢/١/٣ الدالة من الدرجة الثانية:

بفرض أن ف$_{١}$ لم تكن ثابتة فإن معنى ذلك أن القيم لا تمثلها معادلة الدرجة الأولى بل من درجة أعلى وفى هذه الحالة وبعد أن نصل إلى قيم ف$_{١}$ نتبع الآتى:

١- نوجد الفرق بين كل قيمتين متتاليتين من ف$_{١}$ ونطلق عليها فروق ف$_{١}$ وهى تمثل: ف$_{ر+١}$ - ف$_{ر}$ أى نطرح كل قيمة – السابقة لها.

٢- نحسب فروق جديدة للمتغير س حسب العلاقة:

س$_{ر+٢}$ - س$_{ر}$

أى نطرح القيمة الثالثة – الأولى، والرابعة – الثانية، الخامسة – الثالثة وهكذا. (لاحظ أن الفرق بين ترتيب القيم = ٢).

كما يمكن أن نحصل على هذه القيم بطريقة أخرى وهى جمع كل قيمتين متتاليتين من قيم ف$_{س}$ أى ف$_{ر}$ + ف$_{ر+١}$

٣- نحسب ف$_{٢}$ بقسمة فروق ف$_{١}$ ÷ فروق س الجديدة فإذا كانت مقدار ثابت كانت المعادلة التى تمثل المتغيرين من الدرجة الثانية فى صورة:

ص = أس^{٢} + ب س + جـ

أما إذا كانت قيم ف$_{٢}$ غير ثابتة نستمر فى الحل كما يلى:

٤- نحسب الفرق بين كل قيمتين متتاليتين من ف$_{٢}$ ونطلق عليها فروق ف$_{٢}$ وهى ف$_{ر+١}$ - ف$_{ر}$

٥- نحسب فروق جديدة للمتغير س حسب العلاقة:

س$_{ر+٣}$ - س$_{ر}$

أى نطرح القيمة الرابعة – الأولى، الخامسة – الثانية، السادسة – الثالثة وهكذا (لاحظ أن الفرق بين ترتيب القيم = ٣)

كما يمكن أن نحصل على هذه القيم بجمع كل ثلاثة قيم متتالية من قيم ف$_{س}$ أى:

ف$_{ر}$ + ف$_{ر+١}$ + ف$_{ر+٢}$

٦- نحسب ف$_{٣}$ بقسمة فروق ف$_{٢}$ ÷ الفروق الجديدة للمتغير س فإذا كانت ف$_{٣}$ قيمة ثابتة كانت المعادلة التى تمثل المتغيرين من الدرجة الثالثة فى صورة:

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د

فإن لم تكن ف$_{٣}$ ثابتة كان معنى ذلك أن المعادلة من درجة أعلى ونتبع نفس ما سبق للوصول إلى المعادلات من درجات أعلى.

مثال (٥):

أوجد المعادلة التى تمثل العلاقة بين المتغير س، ص من خلال القيم التالية:

س	٢	٣	٤	٥	٧	١٠	١٢	١٥
ص	١٩	٣٢	٤٩	٧٠	١٢٤	٢٣٥	٣٢٩	٥٠٠

الحـل

$ف_س$	$ف_ص$	$ف_1$	فروق $ف_1$	فروق س الجديدة	$ف_2$ = فروق $ف_1$ / فروق س الجديدة
١	١٣	١٣			
			٤	٢	٢
١	١٧	١٧			
			٤	٢	٢
١	٢١	٢١			
			٦	٣	٢
٢	٥٤	٢٧			
			١٠	٥	٢
٣	١١١	٣٧			
			١٠	٥	٢
٢	٩٤	٤٧			
			١٠	٥	٢
٣	١٧١	٥٧			

وحيث أن قيمة $ف_2$ ثابتة فمعنى ذلك أن المعادلة التى تمثل هذه القيم من الدرجة الثانية فى صورة: $ص = أ س^2 + ب س + جـ$

ولكى نحصل على هذه المعادلة نعوض فى العلاقة:

$$ص = ص_ر + ف_1 (س - س_ر) + ف_2 (س - س_ر) (س - س_{ر+1})$$

فإذا افترضنا أن ر = ١ فإن $س_1 = ٢$ ، $ص_1 = ١٩$ ، $س_2 = ٣$

$$ص = ١٩ + ١٣ (س - ٢) + ٢(س - ٢) (س - ٣)$$

$$= ١٩ + ١٣س - ٢٦ + ٢ (س^2 - ٥س + ٦)$$

$$= ١٠ + ١٣س - ٢٦ + ٢س^2 - ١٠س + ١٢$$

$$ص = ٢س^2 + ٣س + ٥$$

لاحظ أن $ف_1 = ١٣$ هى التى تقابل أزواج القيم التى اخترناها وهى الزوج الأول (٢، ١٩).

٣/١/٣ الدالة فى حالة تعدد المتغيرات المستقلة:

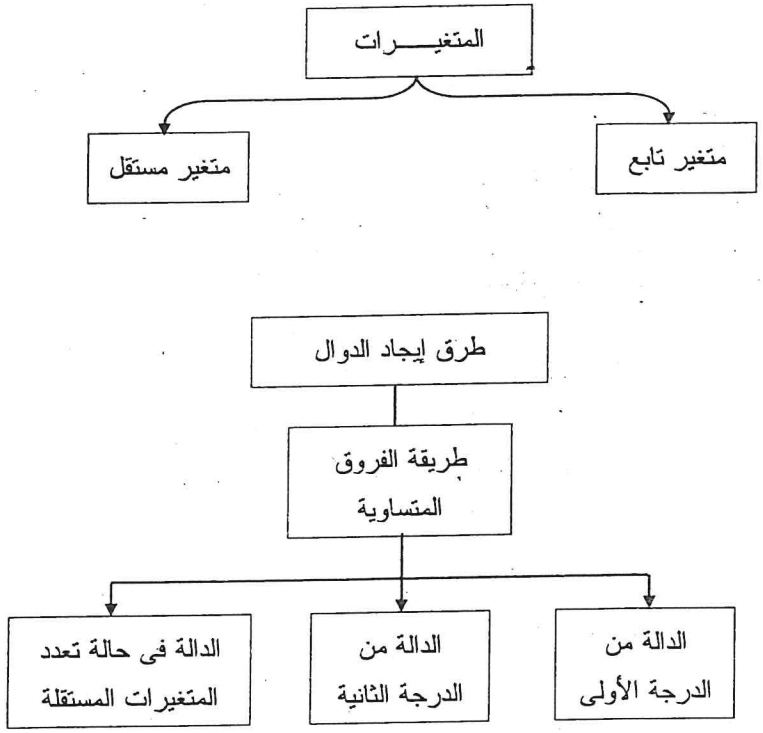
نفرض أن المعادلة التى تمثل العلاقة بين المتغيرين كانت من درجة أعلى (م مثلاً) أى أن قيم ف لم تثبت إلا عند $ف_م$ فإن المعادلة تكون فى الصورة التالية:

$$ص = أ س^م + ب س^{م-1} + جـ س^{م-2} + ... + ك س + ل$$

ويتم إيجاد قيم أ، ب، جـ .....، ك، ل من خلال العلاقة:

$$ص = ص_ر + ف_1(س - س_ر) + ف_2(س - س_ر) (س - س_{ر+1}) + ف_3(س - س_ر) (س - س_{ر+1}) (س - س_{ر+2}) + ... + ف_م (س - س_ر) (س - س_{ر+1}) (س - س_{ر+2}) ..... (س - س_م)$$

٤- الخلاصة



٥- تمـــارين

١- ارسم الدوال التالية بيانياً:

أ) ص = ٢س + ٣

ب) ص = ٢س^{٢} – ٤س + ٣

جـ) ص = ٢س^{٣} – ١

د) ص = س^{٣} + ٢س^{٢} – ٨ بين س = -٤ ، س = ٣

هـ) ص = س^{٢} – ٢س – ٦ بين س = -٣ ، س = ٥

٣- أوجد المعادلة التى تمثل العلاقة بين المتغيرين س، ص إذا كان لديك البيانات التالية:

س	٢	٢	٦	٧	٩	١٢	١٤	١٥	٢٠
ص	١١	١٦	٣١	٣٦	٤٦	٦١	٧١	٧٦	١٠١

٤- أوجد المعادلة التى تمثل العلاقة الدالية بين س، ص من واقع البيانات التالية:

س	٣	٤	٥	٦	٨	٩	١٢	١٥
ص	-٣	-١	٣	٩	٢٧	٣٩	٨٧	١٥٣

٢- أوجد المعادلة التى تمثل العلاقة الدالية بين المتغيرين س، ص من واقع البيانات التالية:

س	٢	٣	٥	٦	٧	٨	١٠	١٣
ص	٥	٨	٩	٨	١٢	١٠	١٠	١٨

٦- نموذج إجابة

تمرين (٤):

س	ص	$ف_س$	$ف_{ص}$	$ف_1 = \frac{ف_{ص}}{ف_س}$	فروق $ف_1$	فروق س الجديدة	$ف_2$
٣	-٣	١	٢	٢	٢	٢	١
٤	-١	١	٤	٤	٢	٢	١
٥	٣	١	٦	٦	٣	٣	١
٦	٩	٢	١٨	٩	٣	٣	١
٨	٢٧	١	١٢	١٢	٣	٣	١
٩	٣٩	٣	٤٨	١٦	٤	٤	١
١٢	٨٧	٣	٦٦	٢٢	٦	٦	١
١٥	١٥٣						

∴ الدالة من الدرجة الثانية فى صورة:

$ص = أ س^2 + ب س + جـ$

ولكى تحصل على هذه الطرح فقط

$ص = ص_ر + ف_1 (س - س_ر) + ف_2 (س - س_ر) (س - س_{ر+1})$

$= -٣ + ٢ (س - ٣) + ١ (س - ٣) (س - ٤)$

$= -٣ + ٢س - ٦ + س^2 - - ٧س + ١٢$

$ص = س^2 - ٥س + ٣$

الوحدة الثامنة

النهايات Limits

١- الأعداد الحقيقية والأعداد غير الحقيقية:

الأعداد الحقيقية هى الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة وكذلك الأعداد الكسرية الموجبة والسالبة والجذور وبعض القوى الأسية وهى بالتالى جميع الأعداد التى يمكن ترتيبها تنازلياً أو تصاعدياً.

وهناك عددان غير حقيقيان هما (∞ ، -∞) وتستخدم (∞) إذا كان هناك متغير حقيقى كمى تزداد قيمته زيادة كبيرة جداً لا يمكن تحديدها أى تؤول قيمته أو تقترب من مالانهاية الموجبة، ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً بأن المتغير س ← ∞. وتستخدم (-∞) إذا كان هناك متغير حقيقى كمى تنقص قيمته نقصاً كبيراً جداً لا يمكن تحديده أى تؤول قيمته إلى مالانهاية السالبة ويعبر عن ذلك رياضياً بأن المتغير س ← - ∞.

فإذا كان أ عدد حقيقى فإن:

$أ \pm \infty = \infty \pm$

$أ \times \pm \infty = \infty \pm$

$\frac{أ}{\pm \infty} = صفر$

$\frac{\pm \infty}{أ} = \pm \infty$

$$\frac{\pm\infty}{\text{صفر}} = \pm\infty$$

وهناك ثلاث كميات غير معرفة أو غير معينة أو غير محددة القيمة هى:

$\frac{\infty}{\infty}$ = كمية غير معينة، $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ =كمية غير معينة، $\infty-\infty$=كمية غير معينة

والمشكلة التى نعرض لها هى أنه قد تواجهنا بعض العقبات عند إيجاد قيمة المتغير التابع عند قيمة معينة للمتغير المستقل، فعلى سبيل المثال.

إذا كانت ص = $\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}$

فإنه يمكن إيجاد قيمة ص عند اى قيمة للمتغير س ولكن عندما تأخذ س القيمة واحد صحيح فإن قيمة الدالة ص = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

وهى كمية غير معينة للدالة ولهذا سوف نحاول إيجاد قيمة للدالة عند قيمة قريبة جداً من الواحد الصحيح للمتغير المستقل (س) ويتضح ذلك من خلال القيم التالية لـ س، ص:

س	نقترب من واحد صحيح	ص	نقترب من القيمة (٢)	س	نقترب من واحد صحيح	ص	نقترب من القيمة (٢)
٠,٩		١,٩		١,١		٢,١	
٠,٩٩		١,٩٩		١,٠١		٢,٠١	
٠,٩٩٩		١,٩٩٩		١,٠٠١		٢,٠٠١	
٠,٩٩٩٩		١,٩٩٩٩		١,٠٠٠١		٢,٠٠٠١	

ويتضح مما سبق أنه كلما اقتربت قيمة المتغير المستقل (س) من واحد صحيح اقتربت قيمة الدالة (ص) من القيمة ٢، أى أن النهاية التى تصل إليها الدالة (ص) عندما يقترب المتغير (س) من واحد صحيح هى القيمة ٢ ونعبر عن ذلك رياضياً كما يلى

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١} = ٢$$

٢- الأساليب الرياضية المستخدمة في إيجاد قيمة الدالة:

هناك من الأساليب الرياضية التى نستعين بها للوصول إلى قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل (س) من نقطة معينة يصعب عندها تحديد قيمة الدالة، ومن أهم هذه الأساليب:

١/٢ تحليل البسط والمقام:

ويتضمن ذلك تحليل الفرق بين المربعين والفرق بين المكعبين ومجموع المكعبين وتحليل المقدار الثلاثى.

مثال (١):

أوجد $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}$

الحـل

بالتعويض المباشر عن س = ١

المقدار = $\frac{١ - ١}{١ - ١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

بتحليل البسط فرق بين مربعين

.. $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ١)}$

نهـا (س + ١) بالتعويض عن س = ١

س ← ١

∴ المقدار = ١ + ١ = ٢ وهى نفس النتيجة التى توصلنا إليها بالمبادئ الأولية.

مثال (٢):

أوجد نـــها $\frac{س^٣ - ٢٧}{س - ٣}$ ، س ← ٣

بالتعويض المباشر المقدار = $\frac{٢٧ - ٢٧}{٣ - ٣} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بتحليل البسط فرق بين مكعبين

نـــها $\frac{(س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)}{(س - ٣)}$ ، س ← ١

نـــها $(س^٢ + ٣س + ٩)$ ، س ← ١ بالتعويض عن س = ٣

المقدار = ٩ + ٩ + ٩ = ٢٧

مثال (٣):

أوجد نـــها $\frac{س^٢ + ٥س - ٦}{س^٢ - ١}$ ، س ← ١

الحـــل

بالتعويض المباشر المقدار = $\frac{١+٥-٦}{١-١} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بتحليل البسط كمقدار ثلاثى والمقام كفرق بين مربعين.

نـــها $\frac{(س - ١)(س + ٦)}{(س - ١)(س + ١)}$ ، س ← ١

نـــها $\frac{س + ٦}{س + ١}$ ، س ← ١ وبوضع س = ١

∴ المقدار = $\frac{١ + ٦}{١ + ١} = \frac{٧}{٢}$

مثال (٤):

أوجد نـــها $\frac{٢س^٢ + س - ١٥}{س^٣ + ٢٧}$ ، س ← -٣

الحـــل

بالتعويض المباشر المقدار = $\frac{١٨-٣-١٥}{-٢٧+٢٧} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بتحليل البسط كمقدار ثلاثى والمقام كمجموع مكعبين.

نـــها $\frac{(س + ٣)(٢س - ٥)}{(س + ٣)(س^٢ - ٣س + ٩)}$ ، س ← -٣

نـــها $\frac{٢س - ٥}{س^٢ - ٣س + ٩}$ ، س ← -٣ وبوضع س = -٣

المقدار = $\frac{٢ (-٣) - ٥}{(-٣)^{٢} - (-٣) + ٩} = \frac{-٦ - ٥}{٩ + ٩ + ٩} = \frac{-١١}{٢٧}$

مثال (٥):

أوجد نـــها $\frac{س^{٣} + ١٢٥}{س^{٢} - ٢٥}$ ، س ← -٥

الحـل

بالتعويض المباشر المقدار= $\frac{(-٥)^{٣} + ١٢٥}{(-٥)^{٢} - ٢٥} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بتحليل البسط كمجموع مكعبين والمقام كفرق بين مربعين.

نـــها $\frac{(س + ٥)(س^{٢} - ٥س + ٢٥)}{(س + ٥)(س - ٥)}$ ، س ← -٥

نـــها $\frac{س^{٢} - ٥س + ٢٥}{س - ٥}$ ، س ← -٥ وبوضع س = -٥

المقدار = $\frac{(-٥)^{٢} - ٥(-٥) + ٢٥}{-٥ - ٥} = \frac{٧٥}{-١٠} = -٧,٥$

٢/٢ قسمة البسط على المقام:

إذا كانت رتبة البسط أكبر من رتبة المقام ولا يقبل أى تحليل فإنه يمكن قسمة البسط على المقام.

مثال (٦):

أوجد نـــها $\frac{س^{٣} - ٤س^{٢} + ٨س - ٥}{س - ١}$ ، س ← ١

الحـل

بالتعويض المباشر المقدار= $\frac{١ - ٤ + ٨ - ٥}{١ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بقسمة البسط على المقام

$$\begin{array}{r|l} (س^{٣}) - ٤س^{٢} + ٨س - ٥ & (س) - ١ \\ \hline \mp س^{٣} \pm س^{٢} & س^{٢} - ٣س + ٥ \\ \hline (-٣س^{٢}) + ٨س - ٥ & \text{بالطرح} \\ \pm ٣س^{٢} \mp ٣س & \\ \hline (٥س) - ٥ & \text{بالطرح} \\ \mp ٥س \pm ٥ & \\ \hline \text{بالطرح} & \\ \cdots & \end{array}$$

نـــها $(س^{٢} - ٣س + ٥)$ بوضع س=١
س ← ١

∴ المقدار = ١-٣+٥ = ٣

مثال (٧):

أوجد نـــها $\frac{س^٣ - ٤س^٢ + ٣}{س^٢ - ١}$ ، س ← -١

الحـل

بالتعويض المباشر المقدار = $\frac{١ - ٤ + ٣}{١ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بقسمة البسط على المقام

س - ٤

(س^٣) − ٤س^٢ + ٣ | (س^٢)-١

∓س^٣ ± س

بالطرح

(-٤س^٢)+ س+٣

±٤س^٢ ∓ ٤

بالطرح

س - ١

نـــها (س − ٤) + $\frac{س - ١}{س^٢ - ١}$ ، س ← -١

بتحليل المقام فرق بين مربعين

نـــها (س − ٤) + $\frac{(س - ١)}{(س - ١)(س + ١)}$ ، س ← -١

نـــها (س − ٤) + $\frac{١}{س + ١}$ ، س ← -١ وبوضع س = ١

المقدار = ١ − ٤ + $\frac{١}{١ + ١}$

= -٣ + $\frac{١}{٢}$ = -٢,٥

٣/٢ قسمة البسط والمقام على قيمة المتغير المستقل (س مثلاً) مرفوعة لأكبر أس:

إذا كانت نهاية المقدار ← ∞ فإنه يتم قسمة كل حد من حدود البسط والمقام على قيمة المتغير المستقل مرفوع لأكبر أس موجود فى البسط أو المقام كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال (٨):

أوجد نـــها $\frac{٢س^٣ + ٣س^٢ + ٩}{٥س^٢ + ٢س + ٦}$ ، س ← ∞

الحـــل

بالتعويض المباشر المقدار = $\frac{\infty}{\infty}$ كمية غير معينة

بقسمة البسط والمقام على س^٣

نـــها $\frac{\frac{٢س^٣}{س^٣} + \frac{٣س^٢}{س^٣} + \frac{٩}{س^٣}}{\frac{٥س^٢}{س^٣} + \frac{٢س}{س^٣} + \frac{٦}{س^٣}}$ ، س ← ∞

نـــها $\frac{٢ + \frac{٣}{س} + \frac{٩}{س^٣}}{٢ + \frac{٢}{س^٢} + \frac{٦}{س^٣}}$ ، س ← ∞ بوضع س = ∞

$$\text{المقدار} = \frac{\frac{٩}{\infty} + \frac{٣}{\infty} + ٢}{\frac{٦}{\infty} + \frac{٢}{\infty} + \frac{٥}{\infty}}$$

$$= \frac{٢ + \text{صفر} + \text{صفر}}{\text{صفر} + \text{صفر} + \text{صفر}} = \frac{٢}{\text{صفر}} = \infty$$

مثال (٩):

أوجد نـــها $\frac{٧\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦}{٣\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + ٦\text{س}}$ ، س ← ∞

الحـــل

بالتعويض المباشر المقدار $= \frac{\infty + \infty + ٦}{\infty + \infty + \infty} = \frac{\infty}{\infty}$ كمية غير معينة

بقسمة البسط والمقام على $\text{س}^{٣}$

نـــها $\frac{\frac{٧}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}^{٢}} + \frac{٦}{\text{س}^{٣}}}{٣ + \frac{٢}{\text{س}} + \frac{٦}{\text{س}^{٢}}}$ ، س ← ∞ بوضع س = ∞

$$\text{المقدار} = \frac{\frac{٧}{\infty} + \frac{٥}{\infty} + \frac{٦}{\infty}}{٣ + \frac{٢}{\infty} + \frac{٦}{\infty}}$$

$$= \frac{\text{صفر} + \text{صفر} + \text{صفر}}{٣ + \text{صفر} + \text{صفر}} = \frac{\text{صفر}}{٣} = \text{صفر}$$

مثال (١٠):

أوجد نـــها $\frac{٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦}{٥\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}$ ، س ← ∞

الحـــل

بالتعويض المباشر المقدار $= \frac{\infty}{\infty}$ كمية غير معينة

بقسمة البسط والمقام على $\text{س}^{٢}$

نـــها $\frac{٣ + \frac{٥}{\text{س}} + \frac{٦}{\text{س}^{٢}}}{٥ - \frac{٣}{\text{س}}}$ ، س ← ∞ بوضع س = ∞

$$\text{المقدار} = \frac{٣ + \frac{٥}{\infty} + \frac{٦}{\infty}}{٥ - \frac{٣}{\infty}} = \frac{٣ + \text{صفر} + \text{صفر}}{٥ - \text{صفر}} = \frac{٣}{٥}$$

ملاحظات:

إذا كانت نهاية المقدار تؤول إلى ∞ وكانت:

١- قيمة المتغير المستقل (س) بأكبر أس موجود فى البسط فإن نهاية المقدار = ∞ (مثال ٨).

٢- قيمة المتغير المستقل (س) بأكبر أس موجود فى المقام فإن نهاية المقدار = صفر (مثال ٩).

٣- قيمة المتغير المستقل (س) بأكبر أس موجود فى البسط والمقام فإن نهاية المقدار

$$= \frac{\text{معامل المتغير المستقل بأكبر أس فى البسط}}{\text{معامل المتغير المستقل بأكبر أس فى المقام}}$$ (مثال ١٠)

٤/٢ إذا كانت نهاية المقدار فى صورة:

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}}$$ فإن نتيجة المقدار = ن × $\text{أ}^{\text{ن}-١}$

لاحظ ما يلى:

١- الحد الأول فى البسط = الحد الأول فى المقام = الدليل الأيمن تحت نها.

٢- الحد الثانى فى البسط = الحد الثانى فى المقام = الدليل الأيسر تحت نها.

٣- الإشارة بين كل حدين فى البسط والمقام سالبة.

٤- أس حدى البسط = ن، وأس حدى المقام = ١.

٥- يمكن استخدام هذه القاعدة متى توافرت شروطها، حتى وإن كانت هناك طرق أخرى للحل مثل التحليل.

مثال (١١):

$$\text{أوجد نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٣} \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣}$$

الحـل

$$\text{بالتعويض المباشر المقدار} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \text{ كمية غير معينة}$$

سبق حل هذا المثال بتحليل البسط فرق بين مكعبين وكانت النتيجة = ٢٧ (مثال٢)

$$\text{نضع المقدار فى صورة نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}}$$

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٣} \frac{\text{س}^{٣} - (٣)^{٣}}{\text{س} - (٣)} = ٣(٣)^{٣-١} = ٣(٣)^{٢} = ٣ \times ٩ = ٢٧$$

مثال (١٢):

$$\text{أوجد نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢,٥} \frac{٨\text{س}^{٣} - ١٢٥}{٢\text{س} - ٥}$$

الحـل

$$\text{بالتعويض المباشر المقدار} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \text{ كمية غير معينة}$$

بوضع المقدار فى صورة نـــها $\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}$ ، س ← أ

نـــها $\frac{(٢س)^{٣} - (٥)^{٣}}{(٢س) - (٥)}$ ، ٢س ← ٥

∴ المقدار = $٣(٥)^{٣-١}$ = $٣(٥)^{٢}$ = ٣ × ٢٥ = ٧٥

(يمكن حل هذا المثال بتحليل البسط كفرق بين مكعبين وسنحصل على نفس النتيجة)

مثال (١٣):

أوجد نـــها $\frac{س^{٤} - ١٦}{س - ٢}$ ، س ← ٢

الحـل

بالتعويض المباشر المقدار = $\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بوضع المقدار فى صورة: نـــها $\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}$ ، س ← أ

نـــها $\frac{(س)^{٤} - (٢)^{٤}}{س - ٢}$ ، س ← ٢ = $٤(٢)^{٤-١}$ = $٤(٢)^{٣}$ = ٤ × ٨ = ٣٢

حل آخر: بتحليل البسط فرق بين مربعين

نـــها $\frac{(س^{٢} - ٤)(س^{٢} + ٤)}{س - ٢}$ ، س ← ٢ ثم تحليل (س – ٤)كفرق بين مربعين

نـــها $\frac{(س - ٢)(س + ٢)(س^{٢} + ٤)}{س - ٢}$ ، س ← ٢

نـــها (س + ٢) (س^{٢} + ٤) بوضع س = ٢

س ← ٢

المقدار = (٢ + ٢) (٤ + ٤) = ٤ × ٨ = ٣٢

٥/٢ إذا كانت نهاية المقدار فى صورة:

نـــها $\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}}$ ، س ← أ فإن نهاية المقدار = $\frac{ن}{م}$ × ن $أ^{ن-م}$

وهى نفس القاعدة السابقة مع اختلاف أن أس حدى المقام > ١

مثال (١٤):

أوجد نـــها $\frac{س^{٣} + ١٢٥}{س^{٢} - ٢٥}$ ، س ← -٥

الحـل

بالتعويض المباشر المقدار= $\frac{(-٥)^{٣}+١٢٥}{(-٥)^{٢}-٢٥}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بوضع المقدار فى صورة: $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}}$

$$\underset{\text{س} \leftarrow -٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} - (-٥)^{٣}}{\text{س}^{٢} - (-٥)^{٢}} = \frac{٣}{٢} \times -(٥)^{٣-٢}$$

$$= \frac{٣}{٢} \times -٥ = -٧,٥$$

مثال (١٥):

أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س}^{٤} - ١٦}$

الحـل

بالتعويض المباشر المقدار= $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

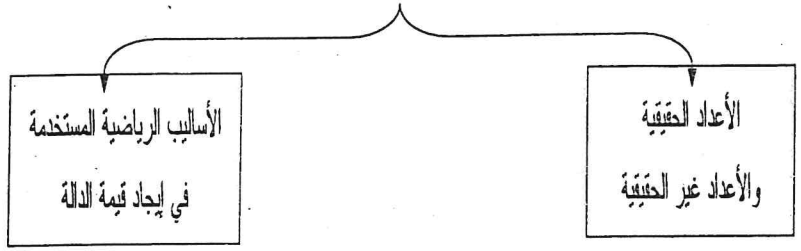
بوضع المقدار فى صورة: $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}}$

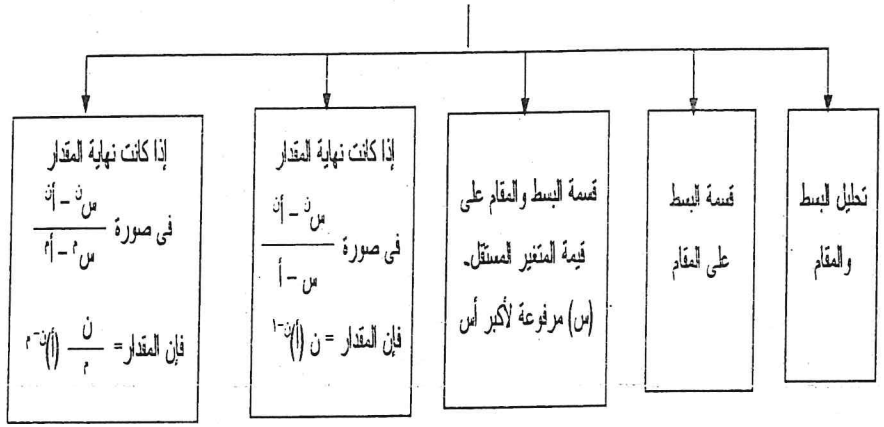
$$\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} - (٢)^{٣}}{\text{س}^{٤} - (٢)^{٤}}$$

$$\therefore \text{المقدار} = \frac{٣}{٤} (٢)^{٣-٤}$$

$$= \frac{٣}{٤} \times (٢)^{-١} = \frac{٣}{٤ \times ٢} = \frac{٣}{٨}$$

٣- الخلاصة





٤- تمارين

١- نهـا $\frac{س^٣ - ٤}{س + ٢}$ ، س ← -٢

٢- نهـا $\frac{س^٢ + ٥س + ٤}{س^٢ + ١}$ ، س ← -١

٣- نهـا $\frac{٢س + ٧}{٢س - ١}$ ، س ← $\frac{١}{٢}$

٤- نهـا $\frac{٣س^٢ + س - ١٤}{س - ٢}$ ، س ← ٢

٥- نهـا $\frac{س^٣ - س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤}$ ، س ← ٢

٦- نهـا $\frac{٣ (٢)^ن + ٤ (٦)^ن}{٦ (٢)^ن + ٧ (٦)^ن}$ ، ن ← ∞

٧- نـــها $\frac{س^{٣} + ٢٧}{س^{٥} + ٢٤٣}$ س ← -٣

٨- نـــها $\frac{١ + ٢ + ٣ + ... + ن}{ن^{٢}}$ ن ← ∞

٩- نـــها $\frac{(٢ + و)^{٣} - ٨}{و}$ و ← ٠

١٠- نـــها $\frac{(س + ٢)^{٨} - ٦٤}{(س + ٣)^{٥} - ٣٢}$ س+١ ← ٠

٥- نموذج إجابة

تمرين (٧): نـــها $\frac{س^{٣} + ٢٧}{س^{٥} + ٢٤٣}$ س ← -٣

نـــها $\frac{س^{٣} - (-٣)^{٣}}{س^{٥} - (-٣)^{٥}} = \frac{٣}{٥} (-٣)^{٣-٥}$ س ← -٣

$= \frac{٣}{٥} (-٣)^{-٢}$

$= \frac{٣}{٥ (-٣)^{٢}} = \frac{٣}{٥ \times ٩} = \frac{١}{١٥}$

تمرين (٩): نـــها $\frac{(٢ + و)^{٣} - ٨}{و}$ و ← ٠

نـــها $\frac{(٢ + و)^{٣} - (٢)^{٣}}{(٢ + و) - ٢} = ٣(٢)^{٣-١}$ ٢+و ← ٢

$= ٣ (٢)^{٢}$

$= ٣ \times ٤ = ١٢$

الوحدة التاسعة

الطريقة البيانية فى حل مشاكل البرمجة الخطية

Graphical Method of Linear Programming

١- مقدمة:

يطلق على الأسلوب الرياضى الذى يعالج مشكلة التوزيع الأمثل لمجموعة من الموارد المحدودة على مجموعة من الاستخدامات المتنافسة على هذه الموارد أسلوب البرمجة الخطية.

وهذا يعنى أن الإطار الذى يحكم علاقة المتغيرات الممثلة لأوجه النشاط المطلوب تحديدها فى إطار مجموعة من الموارد المحدودة يأتى غالباً فى صورة متباينات وليس معادلات.

٢- مكونات نموذج مشكلة البرمجة الخطية:

يتكون هذا النموذج من ثلاثة أجزاء هى:

١/٢- دالة الهدف:

فى أى مشكلة برمجة خطية تقوم الإدارة بتحديد هدف أو معيار للكفاءة يكون قابلاً للقياس، ومن خلال هذا الهدف يتم البحث عن البرنامج الأمثل.

ويتم ترجمة هذا الهدف فى شكل كمى ويصبح دالة للهدف، وهذه الدالة لابد أن تكون خطية، وتجدر الإشارة إلى أن دالة الهدف عبارة عن شكل رياضى لسلوك الأرباح مثلاً (كمتغير تابع) مع التغير فى الكميات المباعة والمنتجة من السلع (متغيرات مستقلة).

٢/٢- القيود (المتباينات) Constraints

إذا نظرنا إلى دالة الهدف يتبين أن التعظيم أو التدنية فى المتغير التابع لا يعنى شيئاً بدون إضافة شكل أو آخر من القيود حيث إنه بدون هذه القيود فإن

تعظيم الأرباح يعنى رقم لا نهائى موجب. وتخفيض التكاليف يعنى صفر. أما إذا وضعنا بعض القيود على دالة الهدف مثل الكميات المتاحة من الموارد أو الإمكانات فإن حجم الإنتاج أو المبيعات أو .. يجب أن يتحدد بحيث لا يتعارض مع هذه القيود.

ولما كان أى برنامج إنتاجى يتضمن إنتاج كميات معينة من السلع لابد أن يصمم بحيث لا يتطلب موارد أكثر من المتاح حالياً فإن القيود الخطية للمشكلة لابد أن يعبر عنها فى شكل متباينات Inequalities وتأتى هذه القيود إما فى شكل (=) أو (≤) أو (≥).

٣/٢- قيود عدم السلبية Non-negative Constraints

وهذه القيود لا تسمح لأى متغير أن تكون له قيمة سالبة فالنشاط إما أن يستبعد أى يأخذ القيمة صفر، أو يكون جزء من البرنامج فتكون له قيمة موجبة.

وتصاغ قيود عدم السلبية فى صورة:

س ≥ صفر ، ص ≥ ٠ ، ع ≥ ٠

٣- خطوات حل مشكلة البرمجة الخطية بيانياً.

١/٣ تحويل المتباينات إلى معادلات

نضع فى كل معادلة س = ٠ ومنها نحسب قيمة ص

ونضع فى كل معادلة ص = ٠ ومنها نحسب قيمة س

٢/٣ نرسم المعادلات

٣/٣ نحدد منطقة الحلول وفقاً لاتجاه المتباينات

٤/٣ نعوض بالنقط فى دالة الهدف

٥/٣ نختار النقطة التى تحقق لنا الهدف

١/٥/٣ إذا كان الهدف تعظيم ربح نختار النقطة التى تحقق أكبر قيمة فى دالة الهدف

٢/٥/٣ إذا كان الهدف تدنية تكاليف نختار النقطة التى تحقق أقل قيمة فى دالة الهدف.

والأمثلة التالية توضح طريقة حل مشكلة البرمجة الخطية بيانياً:

مثال (١): أوجد النهاية العظمى للدالة: ر = ٢٠س + ١٥ص بالقيود التالية:

٢س + ٤ص ≤ ١٦

٣س + ٢ص ≤ ١٢

س ≥ ٠ ص ≥ ٠

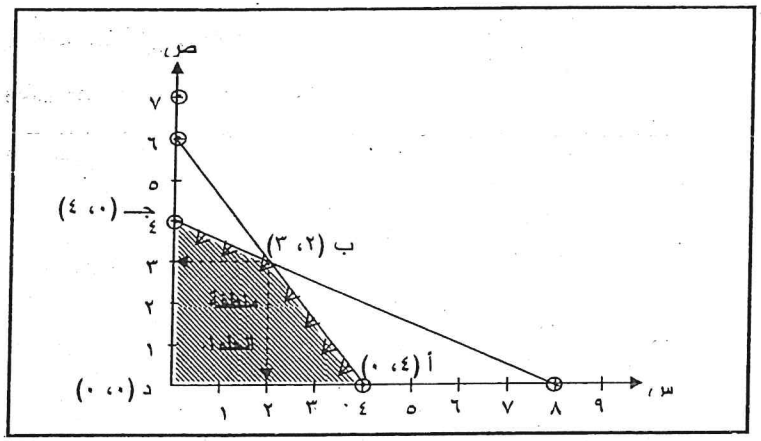
الحـــل

١- نحول المتباينات إلى معادلات:

٢س + ٤ص = ١٦	٣س + ٢ص = ١٢
س = ٠ ص = ٤	س = ٠ ص = ٦
س = ٨ ص = ٠	س = ٤ ص = ٠

٢- نرسم المعادلات.

٣- نحدد منطقة الحلول: وفقاً لاتجاه المتباينات فإن منطقة الحلول تتحدد فى النقط أ، ب، جـ، د.



٤- نعوض بالنقط فى دالة الهدف: ر = ٢٠س + ١٥ص

عند النقطة أ (٤، ٠) ر = ٢٠ (٤) + ١٥ (٠) = ٨٠ جنيه

عند النقطة ب (٢، ٣) ر = ٢٠ (٢) + ١٥ (٣) = ٨٥ جنيه (النهاية العظمى)

عند النقطة جـ (٠، ٤) ر = ٢٠ (٠) + ١٥ (٤) = ٦٠ جنيه

عند النقطة د (٠، ٠) ر = ٢٠ (٠) + ١٥ (٠) = صفر

٥- اختيار الحل الأمثل: يتحقق أقصى ربح ممكن وقدره ٨٥ جنيه عند النقطة ب حيث س = ٢، ص = ٣.

مثال (٢): أوجد النهاية الصغرى للدالة: ت = ٥س + ٨ص بالقيود التالية:

١٠س + ٥ص ≤ ٣٠٠

٥ س + ١٠ص ≤ ٢٥

٤ س + ٣ص ≤ ١٥

س ≤ ٠ ص ≤ ٠

الحـــل

١- نحول المتباينات إلى معادلات:

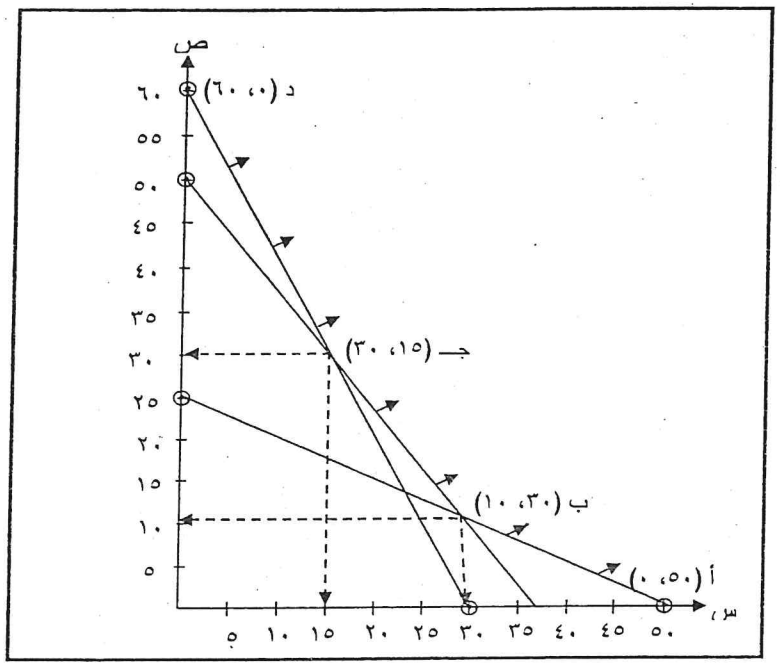
١٠س+٥ص=٣٠٠ ٥س+١٠ص=٢٥٠ ٤س+٣ص=١٥٠

س = ٠ ص = ٦٠ س = ٠ ص = ٢٥ س = ٠ ص = ٥٠

س = ٣٠ ص = ٠ س = ٥٠ ص = ٠ س = ٣٧,٥ ص = ٠

٢- نرسم المعادلات.

٣- نحدد منطقة الحلول: وفقاً لاتجاه المتباينات تتحدد منطقة الحلول فى النقط أ، ب، جـ د



٤- نعوض بالنقط فى دالة الهدف: ت = ٥س + ٨ص

النقطة أ (٥٠، ٠) ت = ٥ (٥٠) + ٨(٠) = ٢٥٠

النقطة ب(٣٠، ١٠) ت = ٥ (٣٠) + ٨(١٠) = ٢٣٠ (النهايـــــة الصغرى)

النقطة جـ (١٥، ٣٠) ت = ٥(١٥) + ٨(٣٠) = ٣١٥

النقطة د (٠، ٦٠) ت = ٥(٠) + ٨(٦٠) = ٤٨٠

٥- اختيار الحل الأمثل: تتحقق النهاية الصغرى للدالة وقدرها ٢٣٠ عند النقطة (ب) حيث س = ٣٠، ص = ١٠.

مثال (٣) أوجد النهاية العظمى للدالة: ر= ٣س + ٤ص بالقيود التالية:

٢س + ٣ص ≤ ١٨

٤س + ٣ص ≤ ٢٤

٥س + ٥ص ≤ ١٥

س ≥ ٠ ≤ ص ٠

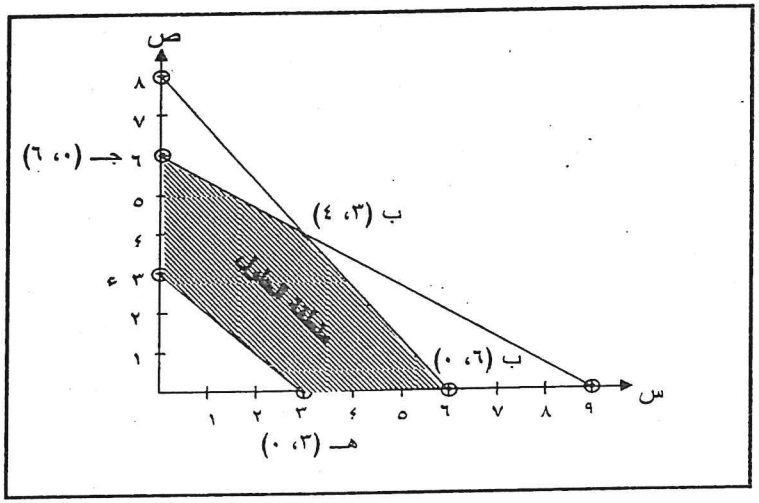
الحـــل

١- نحول المتباينات إلى معادلات:

٢س + ٣ص = ١٨	٤س + ٣ص = ٢٤	٥س + ٥ص = ١٥
س = ٠ ص = ٦	س = ٠ ص = ٨	س = ٠ ص = ٣
س = ٩ ص = ٠	س = ٦ ص = ٠	س = ٣ ص = ٠

٢- نرسم المعادلات.

٣- نحدد منطقة الحلول: وفقاً لاتجاه المتباينات فإن منطقة الحلول تتحدد فى النقط (أ، ب، جـ د، هـ)



٤- نعوض بالنقط فى دالة الهدف : ر= ٣ س + ٤ ص

أ (٦ ، ٠) ر= ٣ (٦) + ٤ (٠) = ١٨

ب (٣ ، ٤) ر = ٣ (٣) + ٤ (٤) = ٢٥(النهاية العظمى)

ج (٠ ، ٦) ر =٣ (٠) + ٤ (٦) = ٢٤

د (٠ ، ٣) ر=٣(٠) + ٤ (٣) = ١٢

ه (٣ ، ٠) ر=٣(٣) + ٤ (٠) = ٩

٥- اختيار الحل الأمثل: تتحقق النهاية العظمى وقدرها ٢٥ عند نقطة ب حيث س = ٣ ، ص = ٤

مثال (٤): أوجد النهاية العظمى للدالة : = ٩س + ٥ص بالقيود الت

٣س + ٢ص ≤ ٤٨

س ≤ ١٢

ص ≤١٨

س ≤ ٠ ≤ ص ٠

الحـــل

١- نحول المتباينات إلى معادلات:

٣س + ٢ص = ٤٨ س = ١٢ ص = ١٨

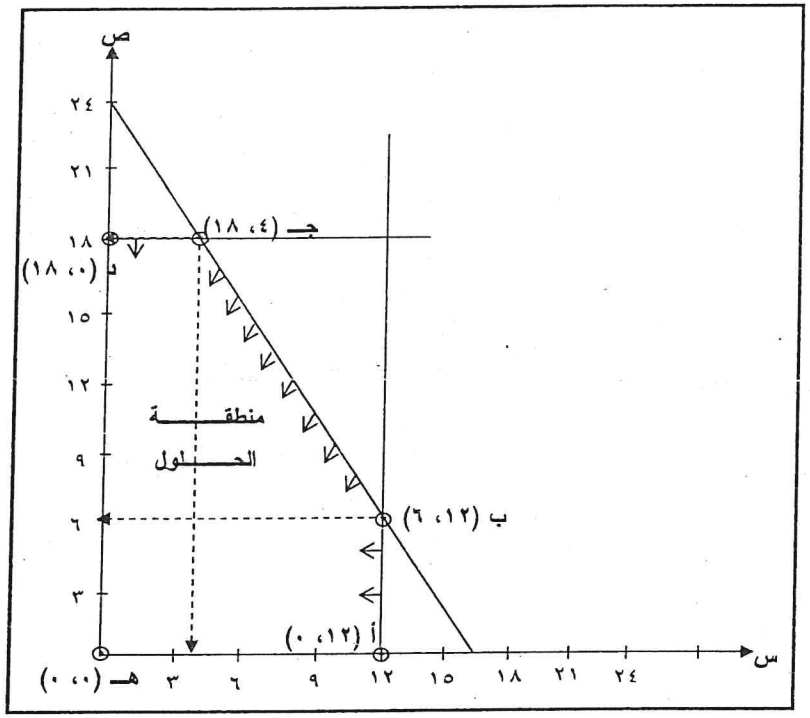
س= ٠ ص = ٢٤

س= ١٦ ص= ٠

٢- نرسم المعادلات:

نحدد منطقة الحلول:

وفقاً لاتجاه المتباينات فإن منطقة الحلول تتحدد فى النقط أ، ب ، جـ ، د، هـ



٤- نعوض بالنقط فى دالة الهدف : ر=٩س + ٥ص

أ (١٢،٠) ر =٩ ×١٢ + ٥×٠ =١٠٨

ب (١٢،٦) ر =٩ ×١٢ + ٥×٦ =١٣٨ (النهاية العظمى)

ج (٤،١٨) ر =٩ ×٤ + ٥×١٨=١٢٦

د (٠،١٨) ر = ٩×٠ + ٥× ١٨=٩٠

ه (٠،٠) ر = -------- = صفر

٥- اختيار الحل الأمثل : تتحقق النهاية العظمى و قدرها ١٣٨ عند نقطة ب حيث س = ١٢ و ص = ٦

مثال (٥): أوجد النهاية الصغرى للدالة : ت = ٢س + ٤ص بالقيود التالية :

٢س + ص ≤ ١٠

س + ٣ص ≤ ١٥

س ≥ ٨

ص ≥ ٥

س ≥ ٠ ≤ ص ٠

الحـــل

١- نحول المتباينات إلى معادلات:

٢س + ص = ١٠ س + ٣ص = ١٥ س= ٨ ص= ٥

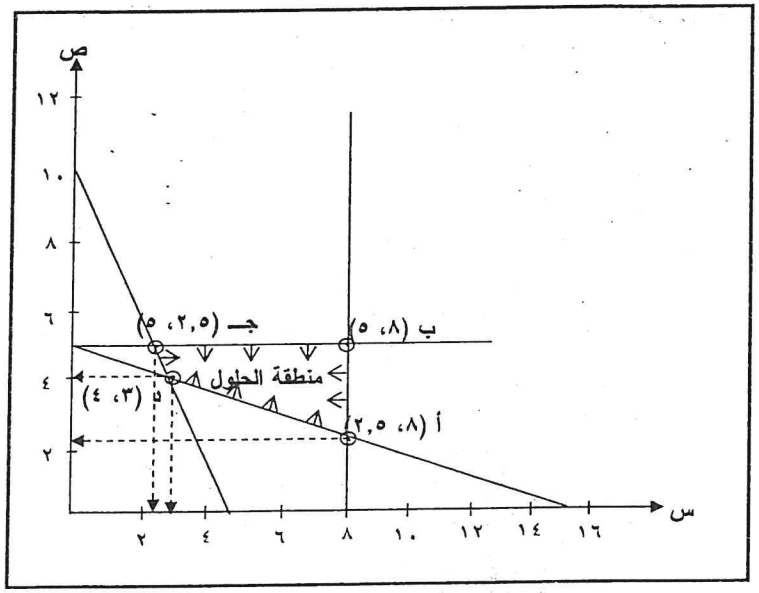
س= ٠ ص = ١٠ س= ٠ ص= ٥

س= ٥ ص= ٠ س= ١٥ ص=٠

٢- نرسم المعادلات:

٣- نحدد منطقة الحلول للمتباينات:

وفقاً لاتجاه المتباينات فإن منطقة الحلول تتحدد فى النقط أ، ب ، جـ ، د



٤- نعوض بالنقط فى دالة الهدف : ت =٢س +٤ص

أ (٨ ، ٢،٥) ت=٢×٨ + ٤×٢,٥ = ٢٦

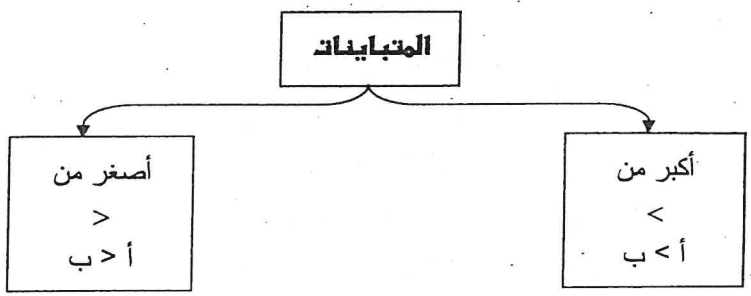
ب (٨ ، ٥) ت =٢×٨ + ٤ × ٥ = ٣٦

ج (٢،٥ ، ٥) ت =٢×٢،٥+ ٤ × ٥ = ٢٥

د (٣ ، ٤) ت =٢×٣+ ٤ × ٤ = ٢٢ (النهاية الصغرى)

٥- اختيار الحل الأمثل : تتحقق النهاية الصغرى و قدرها ٢٢ عند نقطة د حيث س = ٣ و ص = ٤

٤- الخلاصة



الطريقة البيانية فى حل مشاكل البرمجة:

عن طريق تحديد منطقة الحلول والنقط التى تمثل منطقة الحلول يتم التعويض بها فى دالة الهدف ثم يتم اختيار النقطة التى تحقق الهدف سواء كان تعظيم أو تدنية.

٥- تمارين

(١) أوجد النهاية الصغرى للدالة : ت = ٤س + ٥ص بالقيود

٦س + ٤ص ≤ ٢٤

٥س + ٦ص ≤ ٣٠

٢س + ٣ص ≥ ٢٤

س ≥ ٠ ≤ ص ٠

(٢) أوجد النهاية العظمى للدالة : ت = ٣س + ٥ص بالقيود التالية :

٤ س + ٢ص ≤ ٢٤٠

٣ س + ٦ص ≤ ٣٠٠

٦ س + ٦ص ≤ ٤٢٠

س ≥ ٠ ص ≤ ٠

(٣) أوجد النهاية الصغرى للدالة : ت = ٢س + ٣ص بالقيود التالية :

٢س + ص ≤ ٤٠٠

س + ٢ص ≤ ٥٠٠

٤س + ٤ص ≤ ١٤٠٠

س ≥ ٠ ≤ ص ٠

(٤): أوجد النهاية العظمى للدالة : ت = ٥س + ٨ص بالقيود التالية:

٢س + ٣ص ≤ ١٨

٣س + ٣ص ≤ ٢١

ص ≤ ٥

س ≥ ٠ ≤ ص ٠

٦- نموذج إجابة

تمرين (٣):

١- نحول المتباينات إلى معادلات:

س + ص = ٤٠ س = ٨ ص = ١٦

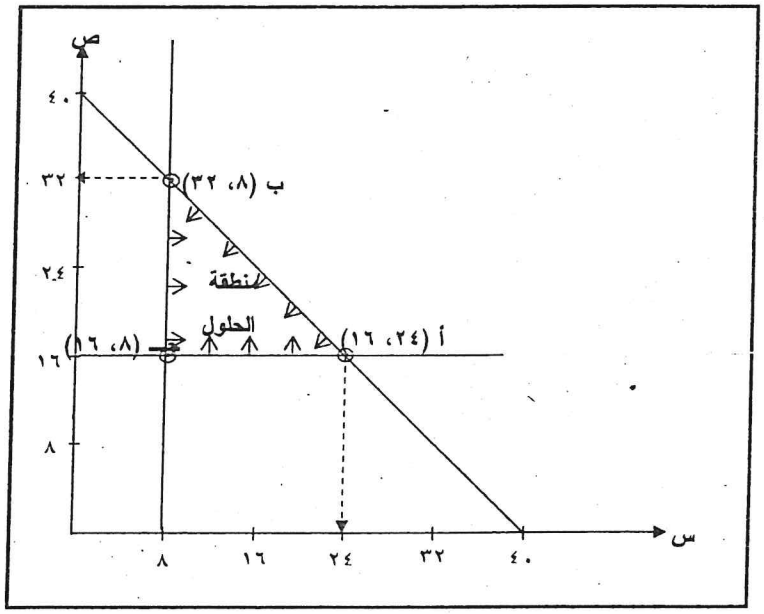
س= ٠ ص= ٤٠

س= ٤٠ ص= ٠

٢- نرسم المعادلات:

٣- نحدد منطقة الحلول للمتباينات:

تتحدد منطقة الحلول فى النقط (أ، ب، جـ).



٤- نعوض بالنقط فى دالة الهدف : ت = ٤س + ٣ص

أ (١٦،٢٤) ت = ٤ × ٢٤ + ٣×١٦=١٤٤

ب (٣٢،٨) ت =٤×٨ + ٣×٣٢ =١٢٨

جـ (١٦،٨) ت = ٤×٨ + ٣×١٦=٨٠ (النهاية الصغرى)

٥- اختيار الحل الأمثل: تتحقق النهاية الصغرى و قدرها ٨٠ عند نقطة جـ حيث س = ٨ و ص = ١٦

المراجـــع

أولاً: المراجع العربية:

١- إبراهيم رسلان حجازى، بحوث العمليات فـى المحاسـبة، النهـضة العربيـة، ١٩٩٥.

٢- إبراهيم على عبد ربه، يحيى سعد زغلول، مقدمة فى الرياضة البحتـة، الـدار الجامعية، الإسكندرية، ١٩٨٨.

٣- إبراهيم محمد مهدى، بعض أساليب بحوث العمليات وتطبيقاتها العملية، مكتبـة الجلاء الجديدة، المنصورة، ١٩٩٣.

٤- أحمد فؤاد عبد الخالق، بحوث العمليات فى المحاسبة، دار الثقافة العربية،القاهرة، ١٩٨٣.

٥- سعد السعيد عبد الرازق، الرياضة التطبيقية للتجاريين، كلية التجـارة، جامعـة القاهرة، ١٩٩٤.

٦- سلامة عبد الله سلامه، محمد توفيق المنصورى، الرياضة البحتة وتطبيقاتها فى الأعمال التجارية، دار النهضة العربية، ١٩٨١.

٧- سمير كامل عاشور، أسس الرياضـة البحتـة، معهـد الدراسـات والبحـوث الإحصائية، جامعة القاهرة، ١٩٨٨.

٨- شوقى سيف النصر، مبادئ الرياضة البحتة للتجاريين، مكتبة النهضة.

٩- عادل عبد الحميد عز، "مبادىء فى الرياضة للتجاريين" كلية التجـارة، جامعـة القاهرة، ١٩٩٤.

١٠- فؤاد محمد رجب، التفاضل والتكامل، دار المعارف، القاهرة، ١٩٧٣.

١١- محمد توفيق المنصورى، مصطفى عبد الغنى أحمد ، "الرياضة التطبيقية للتجاريين" ، دار النهضة العربية ، القاهرة ١٩٩٦.

١٢- محمد صلاح الدين صدقى، منى محمد عمار، "مبادئ فى الرياضة للتجاريين"، دار النهضة العربية ، القاهرة، ١٩٩٠.

١٣- محمود رياض محمود وآخرون، أساسيات فى الرياضة وبحوث العلميات وعلوم الحاسب، معهد الدراسات والبحوث الإحصائية، جامعة القاهرة، ١٩٨٦.

ثانياً: المراجع الأجنبية:

1- Arther B. Simon, Calculus, the MacMillan Company, USA, 1970.

2- B. Gnedenko, The Theory of Probabilities, MIR Publishers, Moscow, 1988.

3- E. Wentzel & L. Ovcharow, Applied Problems in Probaility Theory, MIR Publishers, Moscow, 1986.

4- G. Klimov, Probability Theory and Mathematical Statistics, MIR Publishers, Moscow, 1986.

5- W. m. Harper & H. C.Lim, Operational Reasearch, 2nd Edition, Macdonlad & Evans, London, 1982.