

الرياضة التأهيلية للتجارين

تأليف

أ.د. سعد السعيد عبد الرازق

كلية التجارة — جامعة القاهرة

مقدمة

تعتبر الرياضة بمثابة القلب النابض للدراسات التجارية بما تحقّقه من تسهيلات ومعايير يمكن الإعتماد عليها في دفع عجلة الإنتاج ودعم الإقتصاد القومى.

ولقد رأيت كلية التجارة جامعة القاهرة على أن تقدم لأبنائها الطلاب الذين إجتازو إمتحانات الثانوية التجارية بعض الموضوعات الرياضية ليتعادلون مع طلاب الثانوية العامة من ناحية ، وما يهيؤهم للدراسة الجامعية من ناحية أخرى في سهولة ويسر وبما يحقق النفع المنشود وقد حرص المؤلفان على أن يكون عرض الموضوعات شيقاً سهلاً وبأسلوب يتناسب مع التطور العلمى للاختبارات ، الأمر الذى يحقق الإفادة المنشودة دون تعقيد ويهىء اجتذاب الطلاب وحرصهم على الفهم والإستيعاب .. والله نسأل أن يحقق لوطنا العربى الإزدهار وأن يحقق لمصرنا الحبيبة الأمن والتقدم .. والله ولى التوفيق .. ،

المؤلف

- الفصل الأول : المحددات.
- الفصل الثاني : المصفوفات.
- الفصل الثالث : التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين.
- الفصل الرابع : المتواليات العددية.
- الفصل الخامس : المتواليات الهندسية.
- الفصل السادس : الاحتمالات.
- نماذج امتحانات.

الفصل الأول

المحددات

تعريف: المحدد هو عبارة عن مجموعة أعداد موضوعة في شكل أعمدة رأسية وصفوف أفقية بشرط أن عدد الأعمدة = عدد الصفوف وتتحدد رتبة المحدد بحسب عدد الأعمدة وعدد الصفوف وكل رقم يطلق عليه عنصر ويرمز للمحدد بالرمز Δ (دلتا)، كما يرمز للعنصر بالرمز (أ) ويميز بحسب ترتيب الصف وترتيب العمود الذي يقع به العنصر، ويميز المحدد بخطين رأسيين كما يلي:

محدد من الرتبة الثانية

$$\begin{vmatrix} 21 & 11 \\ 22 & 12 \end{vmatrix} = \Delta$$

محدد من الرتبة الثالثة

$$\begin{vmatrix} 31 & 21 & 11 \\ 32 & 22 & 12 \\ 33 & 23 & 13 \end{vmatrix} = \Delta$$

ولايجاد قيمة المحدد من الرتبة الثانية نتبع ما يلي:

مثال (١): أوجد قيمة Δ

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$28 = 3 \times 4 - 5 \times 8 =$$

مثال (٢): لإيجاد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$[(9-)(3)] - (5-)(7-) =$$

$$62 = 27 + 35 =$$

لايجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة يمكن استخدام طريقتين:

١ / طريقة الأقطار المائلة.

٢ / طريقة تصفير المحدد (المرافقات).

$$\text{مثال (٣): أوجد قيمة المحدد } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} 2^+ & 5^+ & 3^+ \\ 4^- & 1^- & 7^- \\ 8^- & 9^- & 6^- \end{vmatrix} = \Delta$$

⇐ يمكن تكرار العمودين الأول والثاني واستخدام الأقطار المائلة حيث:

$$8 \times 7 \times 5 \blacksquare 9 \times 4 \times 3 \blacksquare 6 \times 1 \times 2 \blacksquare 9 \times 7 \times 2 \blacksquare 6 \times 4 \times 5 \blacksquare 8 \times 1 \times 3$$

$$130 - = 400 - 270 =$$

⇐ كما يمكن تكرار الصفين الأول والثاني واستخدام طريقة الأقطار كما يلي:

$$280 - 108 - 12 - 160 + 126 + 24 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$130 - = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \Delta$$

⇐ حل ثالث (طريقة المرافقات) باستخدام الصف الأول:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} 2 + \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} 5 - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} 3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$(6 - 63) 2 + (24 - 56) 5 - (36 - 8) 3 = \Delta$$

$$130 - = 114 + 160 - 84 =$$

ملاحظة: يجب ملاحظة أن إشارات المحدد متبادلة تبدأ بإشارة موجبة ثم سالبة سواء استخدمنا الصفوف أو الأعمدة.

⇐ حل رابع باستخدام (العمود الأول):

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$(2 - 20) \cdot 6 + (18 - 40) \cdot 7 - (36 - 8) \cdot 3 = \Delta$$

$$130 - = 108 + 154 - 84 - =$$

تجدد الإشارة إلى أن تعدد الطرق يؤدي إلى نفس النتيجة، ويمكن إيجاد المحدد من أي رتبة وسوف نكتفي في مجال دراستنا بالرتبة الثالثة.

مثال (٤): قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ هي:

(أ) ٨٣ (ب) ٣٨ (ج) ٨٨ (د) ٣٣

مثال (٥): قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 6 \\ 7 & 9 & 5 \end{vmatrix}$ هي:

(أ) ١١٤ (ب) ١٤١ (ج) ٤١١ (د) ١٤٤

الحل

$$42 + 54 - 160 - 15 - 216 + 112 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 6 \\ 7 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$141 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 6 \\ 7 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

يمكن للطالب استخدام أكثر من طريقة للتأكد من صحة النتائج.

مثال (٦): في المحدد	٣	١٢	٩
	٨	٤	٦
	١٥	٤	١٢

قيمة المحدد هي:

أ) ٥٢٢ (ب) ٢٥٢ (ج) ٢٢٥ (د) ٥٥٢

$$٢٥٢ = \begin{vmatrix} ٩ & ١٢ & ٣ \\ ٦ & ٤ & ٨ \\ ١٢ & ٤ & ١٥ \end{vmatrix} = \Delta$$

يمكن للطالب التأكد من صحة النتيجة بأكثر من طريقة.

* استخدام المحددات في حل المعادلات:

مثال (٧): باستخدام المحددات حل المعادلات الآتية:

$$٣س + ٢ص = ٢٩ \quad (١)$$

$$٥س + ص = ٣٩ \quad (٢)$$

باستخدام المحددات نجد أن:

$$س = \frac{\Delta_s}{\Delta} \quad , \quad ص = \frac{\Delta_v}{\Delta}$$

حيث Δ = المحدد العام المكون من معاملات المتغيرات أما Δ_s (س) فيمكن الحصول عليه بوضع عمود الحد المطلق مكان عمود (س) وأيضاً Δ_v (ص) بوضع عمود الحد المطلق مكان عمود (ص)، وبحل المحددات والتعويض نحصل على قيم المتغيرات كما يلي:

$$\Delta = \text{المحدد العام} = \text{المحدد المكون من معاملات المتغيرات}$$

$$٧ = ١٠ - ٣ = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_s = ٢٩ - ٧٨ = \begin{vmatrix} ٢ & ٢٩ \\ ١ & ٣٩ \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_v = ٢٨ - ١٤٥ = \begin{vmatrix} ٢٩ & ٣ \\ ٣٩ & ٥ \end{vmatrix} =$$

$$x = \frac{28 - y}{7} = \text{ص}$$

$$y = \frac{49 - x}{7} = \text{س}$$

وللتأكد من صحة الحل يمكن التعويض في المعادلات.

$$29 = 4 \times 2 + 7 \times 3 \quad \text{من المعادلة الأولى:}$$

$$39 = 4 + 7 \times 5 \quad \text{من المعادلة الثانية:}$$

مثال (٨): باستخدام المحددات حل المعادلات الآتية:

$$46 = 2x + 3y$$

$$109 = 7x + 4y$$

الحل

$$13 = 8 - 21 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$104 = 218 - 322 = \begin{vmatrix} 2 & 46 \\ 7 & 109 \end{vmatrix} = \Delta \text{ ص}$$

$$143 = 184 - 327 = \begin{vmatrix} 46 & 3 \\ 109 & 4 \end{vmatrix} = \Delta \text{ ع}$$

$$11 = \frac{143}{13} = \frac{\Delta \text{ ع}}{\Delta} = \text{ع} \quad , \quad 8 = \frac{104}{13} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta} = \text{ص} \therefore$$

$$46 = 11 \times 2 + 8 \times 3 \quad \text{ومن المعادلة الأولى نجد أن:}$$

$$109 = 11 \times 7 + 8 \times 4 \quad \text{ومن المعادلة الثانية:}$$

∴ الحل صحيح

مثال (٩): باستخدام المحددات نجد أن حل المعادلات:

$$63 = 5x + 3y$$

$$60 = 2x + 7y$$

$$(4, 0) \text{ (د)}$$

$$(6, 9) \text{ (ج)}$$

$$(9, 6) \text{ (ب)}$$

$$(0, 4) \text{ (أ)}$$

مثال (١٠): باستخدام المحددات لحل المعادلات:

$$٤س + ٣ص = ٦٥$$

$$٥س + ٢ص = ٦٩$$

نجد أن قيم المتغيرات هي:

أ) (١١، ٧) ب) (١، ١٧) ج) (٧، ٣) د) (١١، ٧)

مثال (١١): توافرت لديك المعادلات التالية:

$$٢س + ٣ص + ع = ١٣٤$$

$$٥س + ٢ص + ع = ١٩١$$

$$٤س + ٢ص + ع = ١٥٧$$

١٣ (د)	٧ (ج)	٩- (ب)	١٥ (أ)	١/ المحدد العام (محدد المعاملات) هو:
٢٥٥ (د)	٢٥٢ (ج)	٥٢٢ (ب)	٢٢٥- (أ)	٢/ محدد بسط س هو:
١٦٢- (د)	٦٢١ (ج)	٦١٢ (ب)	١٢٦ (أ)	٣/ محدد بسط ص هو:
٧٢٠ (د)	٧٠٢ (ج)	٢٠٧ (ب)	٢٧٠- (أ)	٤/ محدد بسط ع هو:
٢٥ (د)	٢٢ (ج)	٥٥ (ب)	٥٢ (أ)	٥/ قيمة س هي:
١١ (د)	٨٨ (ج)	١٨ (ب)	٨١ (أ)	٦/ قيمة ص هي:
٢٠ (د)	١٥ (ج)	١٣ (ب)	٣٠ (أ)	٦/ قيمة ع هي:

الحل

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٥ & ١ \\ ٤ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = \text{المحدد العام} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٥ & ١ \\ ٤ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$(ب) ٩- = ٣٠ - ٨ - ٢ - ٢٠ + ٣ + ٨ =$$

$$\begin{vmatrix} ٣ & ١٣٤ & ١ \\ ٢ & ١٩١ & ١ \\ ٤ & ١٥٧ & ٢ \end{vmatrix} = \text{محدد بسط س} = \begin{vmatrix} ٣ & ١٣٤ & ١ \\ ٢ & ١٩١ & ١ \\ ٤ & ١٥٧ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$(١) ٢٢٥- = ١١٤٦ - ٥٣٦ - ٣١٤ - ٧٦٤ + ٤٧١ + ٥٣٦ =$$

$$\begin{array}{c} 134 \\ 191 \\ 157 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 134 \\ 191 \\ 157 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \bigg| = \text{محدد بسط ص} / 3$$

$$1340 - 314 - 191 - 780 + 134 + 764 =$$

$$(د) 162 - = 1845 - 1683 =$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 134 \\ 191 \\ 157 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \bigg| = \text{محدد بسط ع} / 4$$

$$2355 - 1528 - 268 - 2680 + 573 + 628 =$$

$$(أ) 270 - =$$

$$(د) 25 = 9 - \div 225 - = \text{قيمة س} / 5$$

$$(ب) 18 = 9 - \div 162 - = \text{قيمة ص} / 6$$

$$(أ) 30 = 9 - \div 270 - = \text{قيمة ص} / 7$$

مثال (١٢): توافرت لديك المعادلات التالية:

$$70 = 50 - \text{ص} + 3 \text{ س}$$

$$220 = 20 - \text{ص} + 15 \text{ س}$$

$$190 = 10 + \text{ص} - 8 \text{ س}$$

٩٠١ (د)	٩١٠ (ج)	١٠٩ (ب)	١٩٠ (أ)	١ / المحدد العام هو:
٥٧٠٠ (د)	٧٥٠٠ (ج)	٧٠٠٥ (ب)	٥٠٠٧ (أ)	٢ / محدد بسط س هو:
٨٣٠٠ (د)	٣٠٠٨ (ج)	٣٨٠٠ (ب)	٨٠٠٣ (أ)	٣ / محدد بسط ص هو:
١٠٩٠ (د)	١٩٠٠ (ج)	٩٠١٠ (ب)	٩٠٠١ (أ)	٤ / محدد بسط ع هو:
١٥ (د)	٢٣ (ج)	٢٥ (ب)	٣٠ (أ)	٥ / قيمة س هي:
١٣ (د)	٢٧ (ج)	١٨ (ب)	٢٠ (أ)	٦ / قيمة ص هي:
١٤ (د)	١٠ (ج)	٣٥ (ب)	١١ (أ)	٦ / قيمة ع هي:

الحل

$$\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 5- & 3 & 2 & \\ 2 & 5 & 20- & 15 & 4 & \\ 4 & 1 & 15 & 10- & 8 & \end{array} \Bigg| = \text{المحدد العام} =$$

$$(i) 190 = 180 - 400 - 600 + 200 + 480 - 450 =$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 5- & 3 & 70 & & & \\ 20- & 15 & 220 & & & \\ 15 & 10- & 190 & & & \\ 5- & 3 & 70 & & & \\ 20- & 15 & 220 & & & \end{array} \Bigg| = \text{محدد بسط س} =$$

$$11400 - 11000 + 1050 =$$

$$(د) 5700 = 9900 - 14000 - 14250 +$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 70 & 2 & 5- & 70 & 2 & \\ 220 & 4 & 20- & 220 & 4 & \\ 190 & 8 & 15 & 190 & 8 & \end{array} \Bigg| = \text{محدد بسط ص} =$$

$$4200 - 3800 - 11200 - 7600 + 8800 + 6600 =$$

$$(ب) 3800 = 19200 - 23000 =$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 70 & 3 & 2 & & & \\ 220 & 15 & 4 & & & \\ 190 & 10- & 8 & & & \\ 70 & 3 & 2 & & & \\ 220 & 15 & 4 & & & \end{array} \Bigg| = \text{محدد بسط ع} =$$

$$2280 - 8400 - 2800 - 4400 + 5280 + 5700 =$$

$$(ج) 1900 = 13480 - 10580 =$$

$$٥ / قيمة س = ١٩٠ \div ٥٧٠٠ = ٣٠ (أ)$$

$$٦ / قيمة ص = ١٩٠ \div ٣٨٠٠ = ٢٠ (ج)$$

$$٧ / قيمة ع = ١٩٠ \div ١٩٠٠ = ١٠ (أ)$$

مثال (١٣) : باستخدام المحددات لحل المعادلات:

$$(١) \quad ١٢٩ = ٣ ص + ٥ س$$

$$(٢) \quad ٧٤ = ٤ ص - ٧ س$$

$$١ / محدد بسط س (Δ س) هو: (أ) ٧٣٨- (ب) ٨٣٧ (ج) ٣٧٨ (د) ٣٨٧$$

$$٢ / محدد بسط ص (Δ ص) هو: (أ) ٣٥٣ (ب) ٥٣٣- (ج) ٣٣٥ (د) ٥٥٣$$

$$٣ / المحدد العام (Δ) هو: (أ) ٤١ (ب) ١١ (ج) ٤١- (د) ٤٤$$

$$٤ / قيمة س التي تحقق المعادلة هي: (أ) ٨١ (ب) ١١ (ج) ٨٨ (د) ١٨$$

$$٥ / قيمة ص التي تحقق المعادلة هي: (أ) ٣٣ (ب) ١٣ (ج) ١١ (د) ٣١$$

٦ / قيمة س ، ص التي تحقق المعادلات هي:

$$(أ) (٣١ ، ٨١) \quad (ب) (١٣ ، ١٨) \quad (ج) (١١ ، ٨٣) \quad (د) (١٣ ، ٣٨)$$

الحل

$$(أ) \quad ١ / \Delta \text{ س} = \begin{vmatrix} ٣ & ١٢٩ \\ ٤ & ٧٤ \end{vmatrix} = ٣ \cdot ٧٤ - ٤ \cdot ١٢٩ = ٢٢٢ - ٥١٦ = -٢٩٤$$

$$(ب) \quad ٢ / \Delta \text{ ص} = \begin{vmatrix} ١٢٩ & ٥ \\ ٧٤ & ٧ \end{vmatrix} = ١٢٩ \cdot ٧ - ٥ \cdot ٧٤ = ٩٠٣ - ٣٧٠ = ٥٣٣$$

$$(ج) \quad ٣ / \Delta = \text{المحدد العام} = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{vmatrix} = ٣ \cdot ٧ - ٥ \cdot ٤ = ٢١ - ٢٠ = ١$$

$$(د) \quad ٤ / \Delta \text{ س} = \Delta \div \text{س} = -٢٩٤ \div ٧٣٨ = -٤١$$

$$(ب) \quad ٥ / \Delta \text{ ص} = \Delta \div \text{ص} = ٥٣٣ \div ٤١ = ١٣$$

$$(ب) \quad ٦ / \text{قيم س ، ص التي تحقق المعادلات هي: (١٣ ، ٨١)}$$

مثال (١٤) : باستخدام المحددات لحل المعادلات:

$$(١) \quad ٧٨ = ٥ + ٢$$

$$(٢) \quad ١٢٠ = ٧ + ٤$$

١/ محدد بسط ص (Δ) هو: (أ) ٤٤ (ب) ٥٥ (ج) ٤٥- (د) ٥٤-

٢/ محدد بسط ل (Δ) هو: (أ) ٧٢- (ب) ٢٧ (ج) ٢٢ (د) ٧٧

٣/ المحدد العام (Δ) هو: (أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ٦- (د) ١٤

٤/ قيمة ص التي تحقق المعادلة هي: (أ) ٥- (ب) ٩ (ج) ١٤ (د) ١١

٥/ قيمة ل التي تحقق المعادلة هي: (أ) ٢١ (ب) ٢٢ (ج) ١١ (د) ١٢

٦/ قيمة ص ، ل التي تحقق المعادلات هي:

(أ) (٢ ، ١٩) (ب) (٥ ، ١٣) (ج) (١٢ ، ٩) (د) (٢١ ، ٩)

الحل

$$(د) \quad ٥٤- = ٦٠٠ - ٥٤٦ = \begin{vmatrix} ٥ & ٧٨ \\ ٧ & ١٢٠ \end{vmatrix} = \Delta / ١$$

$$(أ) \quad ٧٢- = ٣١٢ - ٢٤٠ = \begin{vmatrix} ٧٨ & ٢ \\ ١٢٠ & ٤ \end{vmatrix} = \Delta / ٢$$

$$(ج) \quad ٦- = ٢٠ - ١٤ = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{vmatrix} = \Delta / ٣ = \text{المحدد العام}$$

$$(ب) \quad ٩ = ٦- \div ٥٤- = \Delta \div \text{ص} = \Delta / \text{ص}$$

$$(د) \quad ١٢ = ٦- \div ٧٢- = \Delta \div \text{ل} = \Delta / \text{ل}$$

(ج) ٦/ قيم ص ، ل التي تحقق المعادلات هي: (١٢ ، ٩)

مثال (١٥) : باستخدام المحددات لحل المعادلات:

$$(١) \quad ٢٤٤ = ٩ + ٧$$

$$(٢) \quad ٢٠٧ = ٣ + ١٢$$

١/ المحدد العام (Δ) هو: (أ) ٨٧- (ب) ٧٨ (ج) ٨٨ (د) ٧٧

٢/ محدد بسطع (Δ ص) هو: (أ) ٣١١١ (ب) ١٣١٣ (ج) ١١٣١- (د) ١١٣٣

٣/ محدد بسطس (Δ ل) هو: (أ) ١٤٧٩- (ب) ١٧٤٩ (ج) ٩١٧٤ (د) ٤٧٩١

٤/ قيمة ع هي: (أ) ٣١ (ب) ٣٣ (ج) ١٣ (د) ١١

٥/ قيمة س هي: (أ) ١٧ (ب) ٧٧ (ج) ١١ (د) ٧١

٦/ قيمة ع ، س التي تحقق المعادلات هي:

(أ) (٣١ ، ٧١) (ب) (٣٣ ، ٧٧) (ج) (١٣ ، ١٧) (د) (٧٣ ، ١١)

الحل

$$(أ) \Delta / ١ = \text{المحدد العام} = \begin{vmatrix} ٩ & ٧ \\ ٣ & ١٢ \end{vmatrix} = ٢١ - ١٠٨ = -٨٧$$

$$(ج) \Delta / ٢ = \begin{vmatrix} ٢٤٤ & ٧ \\ ٢٠٧ & ١٢ \end{vmatrix} = ٧٣٢ - ١٨٦٣ = -١١٣١$$

$$(أ) \Delta / ٣ = \begin{vmatrix} ٢٤٤ & ٧ \\ ٢٠٧ & ١٢ \end{vmatrix} = ١٤٤٩ - ٢٩٢٨ = -١٤٧٩$$

$$(ج) \Delta / ٤ = \begin{vmatrix} ١٣ & ١٧ \\ ٧٣ & ١١ \end{vmatrix} = ٨٧ - ١١٣١ = -٨٢٤$$

$$(أ) \Delta / ٥ = \begin{vmatrix} ١٧ & ٧٧ \\ ٧٣ & ١١ \end{vmatrix} = ٨٧ - ١٤٧٩ = -١٣٩٢$$

(ج) ٦/ قيم ع ، س التي تحقق المعادلات هي: (١٣ ، ١٧)

تطبيقات على المحددات

(١) باستخدام المحددات حل المعادلات الآتية:

$$٩ \text{ س} + ٥ \text{ ص} = ١٠٥$$

$$٨ \text{ س} + ٢ \text{ ص} = ٧٤$$

$$(٢) \text{ أوجد قيمة المحدد: } \begin{vmatrix} ٧ & ٤ & ٥ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ ٨ & ٩ & ٦ \end{vmatrix}$$

(٣) باستخدام المحددات أوجد قيمة ع فقط من المعادلات الآتية:

$$٣ \text{ س} + ٤ \text{ ص} + ٥ \text{ ع} = ٧٤$$

$$٢ \text{ س} + ٣ \text{ ص} + ٤ \text{ ع} = ٥٦$$

$$٣ \text{ س} + ٢ \text{ ص} + ٣ \text{ ع} = ٣٨$$

(٤) باستخدام المحددات حل المعادلات الآتية:

$$٢ \text{ س} + \text{ ص} + ٣ \text{ ع} = ٤٦$$

$$٥ \text{ س} - ٢ \text{ ص} + \text{ ع} = ٣٣$$

$$٤ \text{ س} + ٣ \text{ ص} - \text{ ع} = ٦٨$$

الفصل الثاني

المصفوفات

تعريف: المصفوفة هي منظوم من الأعداد موضوعة في شكل أعمدة وصفوف لكن لا يشترط أن يتساوى عدد الأعمدة مع عدد الصفوف.

الشكل العام للمصفوفة:

١/ متجه أفقي: مكون من صف واحد وأي عدد من الأعمدة:

$$[٧ \quad ٤ \quad ٢] \quad , \quad [٥ \quad ٣]$$

٢/ متجه رأسي: مكون من عمود واحد وأي عدد من الصفوف:

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \\ ٧ \\ ٩ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢ \\ ٠ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ٣ \\ ٨ \end{bmatrix}$$

٣/ مصفوفة: مكون من أي عدد من الأعمدة وأي عدد من الصفوف بحيث عدد الأعمدة \neq عدد الصفوف (\neq لا يساوي)

$$\begin{bmatrix} ٨ & ٩ \\ ٤ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٤ & ٦ \end{bmatrix}$$

٤/ مصفوفة مربعة: عدد الأعمدة = عدد الصفوف ويلاحظ أن المصفوفة ليس لها قيمة معينة ولكنها تستخدم في عمليات رياضية أخرى.

$$\begin{bmatrix} ١ & ٩ & ٥ \\ ٢ & ٧ & ٤ \\ ٦ & ٨ & ٩ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$$

٥/ المصفوفة الصفرية: جميع عناصرها تساوي صفر

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

٦/ مصفوفة الواحد الصحيح: هي مصفوفة جميع عناصرها صفر ما

عدا العناصر التي تقع على القطر الرئيسي المائل

من اليمين إلى اليسار تساوي واحد صحيح موجب.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٧/ المصفوفة القطرية: جميع عناصرها تساوي صفر ما عدا العناصر

على القطر الرئيسي أية أرقام تختلف عن الواحد الصحيح.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

* جمع وطرح المصفوفات:

يشترط لجمع أو طرح مصفوفتين أن تكونا متماثلتين بحيث

عدد أعمدة الأولى = عدد أعمدة الثانية وعدد صفوف الأولى = عدد صفوف

الثانية ثم تجمع العناصر المتناظرة جبرياً.

مثال (١): أوجد حاصل جمع المصفوفتين:

$$أ = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad ، \quad ب = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

الحل

$$أ + ب = \begin{bmatrix} 12 & 11 & 11 \\ 4 & 5 & 16 \end{bmatrix}$$

مثال (٢): أوجد [أ] - [ب] في المثال السابق.

الحل

$$أ - ب = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

إذا طرحنا المصفوفة ب من المصفوفة أ تضرب جميع عناصر المصفوفة ب

في سالب واحد ثم يجمع كل رقمين متناظرين.

* ضرب كمية ثابتة في مصفوفة:

تضرب الكمية الثابتة في جميع عناصر المصفوفة.

مثال (٣): أوجد حاصل ضرب: $S \times \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}$

الحل

$$\begin{bmatrix} 5S & 1S & 3S \\ 4S & 7S & -2S \end{bmatrix} = \text{حاصل الضرب}$$

* ضرب المصفوفات:

يشترط لضرب مصفوفتين أو متجهين أن يكون عدد أعمدة الأولى يساوي

عدد صفوف الثانية.

مثال (٤): أوجد حاصل ضرب: $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

الحل

$$\text{حاصل الضرب} = \begin{bmatrix} 18 - 8 + 9 & 12 - 32 + 15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -5 \end{bmatrix}$$

ملحوظة: الناتج مصفوفة تشبه الأولى من حيث عدد الصفوف وتشبه الثانية من ناحية عدد الأعمدة.

مثال (٥): أوجد حاصل ضرب: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 6 & 9 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$

الحل

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3 \times 2 + 6 \times 5 + 10 \times 3 & 11 \times 2 + 9 \times 5 + 8 \times 3 \\ 3 \times 7 + 6 \times 4 + 10 \times 1 & 11 \times 7 + 9 \times 4 + 8 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 66 & 91 \\ 55 & 121 \end{bmatrix} =$$

* مقلوب المصفوفة (معكوس المصفوفة):

يشترط للحصول على مقلوب المصفوفة أن تكون مصفوفة مربعة.

وتتلخص خطوات الحل فيما يلي:

١/ محدد المصفوفة.

٢/ محددات العناصر (المحددات الصغرى لجميع العناصر).

٣/ متممات العناصر.

٤/ مصفوفة المتممات.

٥/ المصفوفة المبدلة.

٦/ مقلوب المصفوفة = مقلوب المحدد \times المصفوفة المبدلة.

مثال (٦): أوجد مقلوب المصفوفة: $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

الحل

$$(1) \Delta = \text{محدد المصفوفة} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 56 = 44$$

$$(2) \text{محددات العناصر: } 7 = 11\Delta \quad 3 = 21\Delta$$

$$8 = 12\Delta \quad 4 = 22\Delta$$

$$(3) \text{متممات العناصر: } 7 = 11\Delta \quad 3 = 21\Delta$$

$$8 = 12\Delta \quad 4 = 22\Delta$$

$$(4) \text{مصفوفة المتممات: } \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(5) \text{المصفوفة المبدلة: } \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

(٦) مقلوب المصفوفة = $\frac{1}{\Delta} \times$ المصفوفة المبدلة

$$\begin{bmatrix} \frac{4-}{44} & \frac{7}{44} \\ \frac{8}{44} & \frac{3-}{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4- & 7 \\ 8 & 3- \end{bmatrix} \times \frac{1}{44} =$$

للتأكد من صحة الحل:

المصفوفة الأصلية \times مقلوبها = مصفوفة الواحد الصحيح

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{32+32-}{44} & \frac{12-56}{44} \\ \frac{56+12-}{44} & \frac{21-21}{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4-}{44} & \frac{7}{44} \\ \frac{8}{44} & \frac{3-}{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال (٧): أوجد مقلوب المصفوفة: $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

الحل

$$\Delta = \text{محدد المصفوفة} = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 45 - 48 = 3 \quad (1)$$

$$5 = 21\Delta \quad 8 = 11\Delta \quad (2) \text{ محددات العناصر:}$$

$$6 = 22\Delta \quad 9 = 12\Delta$$

$$5- = 21\rho \quad 8 = 11\rho \quad (3) \text{ متممات العناصر:}$$

$$6 = 22\rho \quad 9- = 12\rho$$

$$\begin{bmatrix} 5- & 8 \\ 6 & 9- \end{bmatrix} \quad (4) \text{ مصفوفة المتممات:}$$

$$\begin{bmatrix} 9- & 8 \\ 6 & 5- \end{bmatrix} \quad (5) \text{ المصفوفة المبدلة:}$$

(٦) مقلوب المصفوفة = $\frac{1}{\Delta} \times$ المصفوفة المبدلة

$$\begin{bmatrix} \frac{9-}{3} & \frac{8-}{3} \\ \frac{6-}{3} & \frac{5-}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9- & 8- \\ 6- & 5- \end{bmatrix} \times \frac{1}{3} =$$

للتأكد من صحة الحل:

المصفوفة الأصلية \times مقلوبها = مصفوفة الواحد الصحيح

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{54 + 54-}{3} & \frac{45 - 48}{3} \\ \frac{48 + 45-}{3} & \frac{40 - 40}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9-}{3} & \frac{8-}{3} \\ \frac{6-}{3} & \frac{5-}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

* استخدام المصفوفات في حل المعادلات:

سوف تقتصر الدراسة على حل المعادلات الخطية في متغيرين فقط،
ويستخدم أسلوب مقلوب مصفوفة المعاملات كما يلي:

مثال (٨): باستخدام المصفوفات حل المعادلات الآتية:

$$(١) \quad \begin{cases} 3x + 2y = 34 \end{cases}$$

$$(٢) \quad \begin{cases} 3x + 6y = 38 \end{cases}$$

الحل

أولاً: مصفوفة المعاملات: $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

ثانياً: إيجاد مقلوب مصفوفة المعاملات:

$$(١) \quad \Delta = \text{محدد المصفوفة} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 16-$$

$$6 = 21\Delta$$

$$2 = 22\Delta$$

$$(٢) \quad \text{محددات العناصر: } 1 = 11\Delta$$

$$3 = 12\Delta$$

(٣) متممات العناصر: $1 = 11P$ $6 = 21P$

$3 = 12P$ $2 = 22P$

(٤) مصفوفة المتممات: $\begin{bmatrix} 6- & 1 \\ 2 & 3- \end{bmatrix}$

(٥) المصفوفة المبدلة: $\begin{bmatrix} 3- & 1 \\ 2 & 6- \end{bmatrix}$

(٦) مقلوب المصفوفة: $\begin{bmatrix} 3- & 1 \\ 2 & 6- \end{bmatrix} \times \frac{1-}{16} =$

$$\begin{bmatrix} 34 & 38 \\ 38 & 34 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1-}{16} \\ \frac{2-}{16} & \frac{6}{16} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{matrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{114 + 34-}{16} \\ \frac{76 - 204}{16} \end{bmatrix} =$$

$$\therefore \text{س} = 5, \text{ص} = 8$$

للتأكد من صحة الحل يمكن التعويض في المعادلات:

من المعادلة (١): $34 = 8 \times 3 + 5 \times 2$

من المعادلة (٢): $38 = 8 \times 1 + 5 \times 6$

\therefore الحل صحيح

مثال (٩): باستخدام المصفوفات حل المعادلات الآتية:

(١) $29 = 3\text{ص} + 7\text{س}$

(٢) $29 = 5\text{ص} + 2\text{س}$

الحل

أولاً: مصفوفة المعاملات: $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

ثانياً: إيجاد مقلوب مصفوفة المعاملات:

$$(1) \Delta = \text{محدد المصفوفة} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 35 = 29$$

$$(2) \text{ محددات العناصر: } 5 = 11\Delta \quad 2 = 21\Delta$$

$$7 = 22\Delta \quad 3 = 12\Delta$$

$$(3) \text{ متممات العناصر: } 5 = 11\beta \quad 2 = 21\beta$$

$$7 = 22\beta \quad 3 = 12\beta$$

$$(4) \text{ مصفوفة المتممات: } \begin{bmatrix} 2- & 5 \\ 7 & 3- \end{bmatrix}$$

$$(5) \text{ المصفوفة المبدلة: } \begin{bmatrix} 3- & 5 \\ 7 & 2- \end{bmatrix}$$

$$(6) \text{ مقلوب المصفوفة} = \begin{bmatrix} \frac{3-}{29} & \frac{5}{29} \\ \frac{7}{29} & \frac{2-}{29} \end{bmatrix}$$

(7) تحديد قيم المتغيرات: مقلوب المصفوفة \times مصفوفة الحد المطلق

$$\begin{matrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{87 - 145}{29} \\ \frac{203 + 58-}{29} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 29 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3-}{29} & \frac{5}{29} \\ \frac{7}{29} & \frac{2-}{29} \end{bmatrix} =$$

$$\therefore \text{س} = 2, \quad \text{ص} = 5$$

وبالتعويض في المعادلات:

$$\text{من المعادلة (1): } 29 = 5 \times 3 + 2 \times 7$$

$$\text{من المعادلة (2): } 29 = 5 \times 5 + 2 \times 2$$

\therefore الحل صحيح

مثال (١٠): توافرت لديك البيانات التالية:

$$(١) \Leftrightarrow ٧١٥ = ١٧ \text{ ص} + ٢٣ \text{ س}$$

$$(٢) \Leftrightarrow ١٧١٠ = ٥٤ \text{ ص} + ٤٥ \text{ س}$$

١/ محدد مصفوفة المعاملات هو: (أ) ٤٤٧ (ب) ٧٧٤ (ج) ٧٤٧ (د) ٤٧٧

٢/ قيمة س التي تحقق المعادلة هي: (أ) ٢٠ (ب) ١٥ (ج) ٢٥ (د) ١٨

٣/ قيمة ص التي تحقق المعادلة هي: (أ) ١١ (ب) ٥٥ (ج) ١٥ (د) ٥١

٤/ قيم س، ص التي تحقق المعادلات هي:

(أ) (١٦، ٢١) (ب) (١٥، ٢٠) (ج) (٥، ٢٦) (د) (٦، ٢٥)

الحل

$$* \text{ مصفوفة المعاملات} = \begin{bmatrix} ١٧ & ٢٣ \\ ٥٤ & ٤٥ \end{bmatrix}$$

$$(١) \Delta = \text{محدد المصفوفة} = \begin{vmatrix} ١٧ & ٢٣ \\ ٥٤ & ٤٥ \end{vmatrix} = ٧٦٥ - ١٢٤٢ = ٤٧٧$$

$$(٢) \text{ محددات العناصر: } ٥٤ = ١١\Delta \quad ٤٥ = ٢١\Delta$$

$$١٧ = ١٢\Delta \quad ٢٣ = ٢٢\Delta$$

$$(٣) \text{ متممات العناصر: } ٥٤ = ١١\rho \quad ٤٥ = ٢١\rho$$

$$١٧ = ١٢\rho \quad ٢٣ = ٢٢\rho$$

$$(٤) \text{ مصفوفة المتممات: } \begin{bmatrix} ٤٥- & ٥٤ \\ ٢٣ & ١٧- \end{bmatrix}$$

$$(٥) \text{ المصفوفة المبدلة: } \begin{bmatrix} ١٧- & ٥٤ \\ ٢٣ & ٤٥- \end{bmatrix}$$

$$(٦) \text{ مقلوب المصفوفة} = \begin{bmatrix} ٧١٥ \\ ١٧١٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{١٧-}{٤٧٧} & \frac{٥٤}{٤٧٧} \\ \frac{٢٣}{٤٧٧} & \frac{٤٥-}{٤٧٧} \end{bmatrix}$$

(٧) تحديد قيم المتغيرات:

$$\begin{matrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{matrix} \begin{bmatrix} ٢٠ \\ ١٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١٧١٠ \times ١٧ - ٧١٥ \times ٥٤}{٤٧٧} \\ \frac{١٧١٠ \times ٢٣ + ٧١٥ \times ٤٥}{٤٧٧} \end{bmatrix} =$$

مثال (١١): توافرت لديك البيانات التالية:

$$(١) \quad ٩٣ = \text{س} + ٦ \text{ ص}$$

$$(٢) \quad ٧٦ = \text{س} + ٧ \text{ ص}$$

١/ قيمة محدد مصفوفة المعاملات هو: أ) ٩٣ ب) ٣٩ ج) ٣٩٠ د) ٩٣٠

٢/ قيم المتغيرات س، ص هي:

أ) (١١، ٥) ب) (٨، ٣) ج) (٩، ٤) د) (٥، ٨)

الحل

$$* \text{ مصفوفة المعاملات} = \begin{bmatrix} ٦ & ٩ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$(١) \quad \Delta = \text{محدد المصفوفة} = \begin{vmatrix} ٦ & ٩ \\ ٧ & ٤ \end{vmatrix} = ٢٤ - ٦٣ = ٣٩$$

$$(٢) \quad \text{محددات العناصر:} \quad ٧ = ١١\Delta \quad ٤ = ٢١\Delta$$

$$٦ = ١٢\Delta \quad ٩ = ٢٢\Delta$$

$$(٣) \quad \text{متممات العناصر:} \quad ٧ = ١١\Delta \quad ٤ = ٢١\Delta$$

$$٦ = ١٢\Delta \quad ٩ = ٢٢\Delta$$

$$(٤) \quad \text{مصفوفة المتممات:} \quad \begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ٩ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$(٥) \quad \text{المصفوفة المبدلة:} \quad \begin{bmatrix} ٦ & ٧ \\ ٩ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{6-}{39} & \frac{7}{39} \\ \frac{9}{39} & \frac{4-}{39} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \times \text{المصفوفة المبدلة} = (6) \text{ مقلوب المصفوفة}$$

(7) تحديد قيم المتغيرات = مقلوب المصفوفة × مصفوفة الحد المطلق

$$\begin{bmatrix} 93 \\ 76 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{6-}{39} & \frac{7}{39} \\ \frac{9}{39} & \frac{4-}{39} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{matrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{456 - 651}{39} \\ \frac{684 + 372}{39} \end{bmatrix} =$$

ومنها: س = 5 ، ص = 8

مثال (١٢): باستخدام المصفوفات حل المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow 3\text{س} + 7\text{ص} &= 134 \\ (2) \Leftrightarrow 5\text{س} - \text{ص} &= 46 \end{aligned}$$

١/ محدد مصفوفة المعاملات هو: (أ) ٣٨ (ب) ٨٣ (ج) ٣٣ (د) ٨٨

٢/ قيمة س التي تحقق المعادلة هي: (أ) ٢١ (ب) ١٢ (ج) ٢٢ (د) ١١

٣/ قيمة ص التي تحقق المعادلة هي: (أ) ٤١ (ب) ٤٤ (ج) ١١ (د) ١٤

٤/ قيم س ، ص التي تحقق المعادلة هي:

(أ) (١٤، ٢١) (ب) (٤١، ١٢) (ج) (١٤، ١٢) (د) (٤١، ٢١)

الحل

$$(1) \Delta = \text{محدد المصفوفة} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 35 = -32$$

(٢) محددات العناصر: $١- = ١١\Delta$ $٥ = ٢١\Delta$

$٣ = ٢٢\Delta$ $٧ = ١٢\Delta$

(٣) متمات العناصر: $١- = ١١\rho$ $٥- = ٢١\rho$

$٣ = ٢٢\rho$ $٧- = ١٢\rho$

(٤) مصفوفة المتمات: $\begin{bmatrix} ٥- & ١- \\ ٣ & ٧- \end{bmatrix}$

(٥) المصفوفة المبدلة: $\begin{bmatrix} ٧- & ١- \\ ٣ & ٥- \end{bmatrix}$

(٦) مقلوب المصفوفة = $\frac{1}{\Delta} \times$ المصفوفة المبدلة

$$\begin{bmatrix} ١٣٤ \\ ٤٦ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{٧}{٣٨} & \frac{١}{٣٨} \\ \frac{٣-}{٣٨} & \frac{٥}{٣٨} \end{bmatrix} =$$

(٧) تحديد قيم المتغيرات:

$$\begin{matrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{matrix} \begin{bmatrix} ١٢ \\ ١٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٤٥٦}{٣٨} \\ \frac{٥٣٢}{٣٨} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣٢٢ + ١٣٤}{٣٨} \\ \frac{١٣٨ - ٦٧٠}{٣٨} \end{bmatrix} =$$

مثال (١٣): باستخدام المصفوفات حل المعادلات الآتية:

(١) $\Leftrightarrow ٣٧ = \text{ص} + ٢ \text{س}$

(٢) $\Leftrightarrow ٣٦ = \text{ص} + ٥ \text{س}$

١/ قيمة محدد مصفوفة المعاملات هي:

(د) ٧٠-

(ج) ٧٠

(ب) ٧

(أ) ٧-

٤/ قيم المتغيرات هي:

(د) (١٢-، ٥٠-)

(ج) (٥٠، ١١)

(ب) (١١، ٥)

(أ) (١١، ٥٠)

الحل

* مصفوفة المعاملات: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$(1) \Delta = \text{محدد المصفوفة} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7$$

$$(2) \text{ محددات العناصر: } 1 = 11\Delta \quad 5 = 21\Delta$$

$$3 = 22\Delta \quad 2 = 12\Delta$$

$$(3) \text{ متممات العناصر: } 1 = 11\Delta \quad 5 = 21\Delta$$

$$3 = 22\Delta \quad 2 = 12\Delta$$

$$(4) \text{ مصفوفة المتممات: } \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(5) \text{ المصفوفة المبدلة: } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(6) \text{ مقلوب المصفوفة} = \frac{1}{\Delta} \times \text{المصفوفة المبدلة}$$

$$\begin{bmatrix} 37 & 36 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix} =$$

(7) تحديد قيم المتغيرات بضرب مقلوب المصفوفة في مصفوفة الحد المطلق:

$$\begin{matrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{7} \\ \frac{77}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{72 + 37}{7} \\ \frac{108 - 185}{7} \end{bmatrix} =$$

ومنها: س = 5 ، ص = 11

تطبيقات على المصفوفات

١ / أوجد مقلوب المصفوفة: $\begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ٩ & ٢ \end{bmatrix}$

٢ / أوجد حاصل ضرب المصفوفتين: $\begin{bmatrix} ١٢ & ٨ \\ ٦ & ١٠ \\ ١١ & ٩ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٧ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

٣ / باستخدام المصفوفات حل المعادلات:

(١) $\Leftrightarrow ٨٠ = ٧ ص + ٤ س$

(٢) $\Leftrightarrow ٣٤ = ٢ ص + ٣ س$

نجد أن قيم [س، ص] هي:

(د) [٦، ٨]

(ج) [٩، ٥]

(ب) [٥، ٦]

(أ) [٨، ٦]

٤ / باستخدام المصفوفات في حل المعادلات:

(١) $\Leftrightarrow ٣٤ = ٥ ص + ٣ س$

(٢) $\Leftrightarrow ١٨ = ص + ٢ س$

بحل المعادلات نجد أن قيم [س، ص] هي:

(د) [٨، ٢]

(ج) [٢، ٨]

(ب) [٨، ٨]

(أ) [٢، ٢]

الفصل الثالث

التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

أولاً: التباديل: هي عمليات ترتيب أشياء ويرمز لها بالرمز (ل)؛ ويمكن استنتاج مجموع قواعد رياضية من خلال الأمثلة التالية:

مثال (١): بكم طريقة يمكن ترتيب شخصين في مكانين.

الحل

(٢)

(١)

الأماكن

ب
أ

أ
ب

الأشخاص

(تقرأ مضروب ٢)

عدد الطرق = $2! = 2$

$$2 = 1 \times 2 =$$

ملاحظة: مضروب أي رقم يعتمد على ضرب الرقم في الأقل منه بالتنازل حتى نصل إلى الواحد الصحيح.

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5!$$

وهكذا....

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 8!$$

مثال (٢): بكم طريقة يمكن ترتيب ثلاثة أشخاص في ثلاثة أماكن؟

الحل

(٣)

(٢)

(١)

الأماكن

ج

ب

أ

الأشخاص

ب

ج

أ

ج

أ

ب

أ

ج

ب

ب

أ

ج

أ

ب

ج

يلاحظ أن: عدد الطرق = ٦ ويمكن استنتاج القاعدة:

عدد طرق ترتيب ثلاثة أشخاص في ثلاثة أماكن

وهكذا...

$$6 = 1 \times 2 \times 3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 =$$

عدد طرق ترتيب أربعة أشخاص في أربعة أماكن
 $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

وتأسيساً على ذلك يمكن استنتاج القاعدة:

عدد طريق ترتيب (n) من الأشياء في (n) من الأماكن $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$

مثال (٣): بكم طريقة يمكن ترتيب ٣ أشخاص في مكانين؟

الحل

عدد الطرق $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

بفرض الأماكن الأشخاص	
(١)	(٢)
أ	ب
أ	ج
ب	أ
ب	ج
ج	أ
ج	ب

∴ عدد الطرق = ٦

وعلى ذلك نجد أن:

طريقة $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

طريقة $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$

ويمكن استنتاج القاعدة العامة كما يلي:

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$

لكن:

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1) \times (n-r) \times \dots \times 1$

توضيح:

عدد الحدود أربعة $11 \times 10 \times 9 \times 8 = 7920$

$11 \times 10 \times 9 \times (11-4) = 7920$

٢٩

وأيضاً:

$$10! = 10 \times 14 \times 13 \times \dots \times (10 - 6 + 1)$$

$$10 \times \dots \times \dots \times 14 \times 10 =$$

$$23! = 23 \times 22 \times 21 \times \dots \times (23 - 5 + 1)$$

$$19 \times \dots \times \dots \times 21 \times 22 \times 23 =$$

$$30! = 30 \times 34 \times 33 \times \dots \times (30 - 6 + 1)$$

$$30 \times \dots \times \dots \times 34 \times 30 =$$

ثانياً: التوافيق (٧):

التوافيق هي عمليات اختيار بمعنى أننا نحاول اختيار عدد من عدد أكبر منه .. أي أننا يمكن محاولة اختيار شخصين من بين ثلاثة أشخاص أو اختيار ٥ أشخاص من بين عشرة وليس منطقياً أن نختار ثلاثة من اثنين!! أو نختار خمسة من أربعة!! وتتضح التوافيق باختيار عدد من عدد أكبر منه أو على الأقل يساويه كأن نختار اثنين من بين اثنين أو ثلاثة من بين ثلاثة .. وهكذا..

مثال (١): بكم طريقة يمكن اختيار شخصين من ثلاثة؟

الحل

$$3! = \frac{3 \times 2}{1 \times 2} = 3 \quad \text{ويمكن توضيح ذلك كما يلي:}$$

بفرض الأشخاص أ، ب، ج نرغب في اختيار ٢.

عدد الطرق = أ ب، أ ج، ب ج ثلاثة طرق.

ملاحظة: في التمارين يمكن أن نقبل التكرار حيث (أ ب) تختلف عن (ب أ) وأيضاً (ب ج) تختلف عن (ج ب).

أما التوافيق لا تهتم بالترتيب. ولتوضيح ذلك:

إذا رغبت إدارة الكلية اختيار طالبين لمنحهما جائزتين الأولى ١٠٠ جنيه والثانية ٥٠ جنيه فإن (أ ب) تعني أن يحصل على ١٠٠ ج أما ب يحصل على ٥٠ فقط وهذا واضح إذا اخترنا (ب أ) فإن ب يحصل على القيمة الأكبر، أ يحصل على الأصغر، أما إذا كانت الجائزتين ١٠٠ ج للأول، ١٠٠ ج للثاني فإن [أ ب = ب أ].

مثال (٢): أسندت إليك إحدى الشركات اختيار ثلاثة موظفين من إحدى الإدارات وبها عشرة موظفين للقيام برحلة، ما هي عدد طرق الاختيار؟

الحل

$$\text{عدد الطرق} = ١٠! = \frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{١ \times ٢ \times ٣} = ١٢٠ \text{ طريقة}$$

∴ القاعدة:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(1)}{r!} = {}^nP_r$$

∴ ${}^nP_r = n(n-1)(n-2)\dots$ هذه القاعدة هامة جداً

ويمكن الاستفادة منها في الأعداد الكبيرة، بفرض أن مجموعة طلاب عددهم ١٠٠ نرغب في اختيار ٩٦ من بينهم فإن:

$$\text{عدد الطرق} = ١٠٠! = \frac{١٠٠ \times ٩٩ \times \dots \times (١٠٠ - ٩٦ + ١)}{٩٦!}$$

وهذا الرقم مع أنه صحيح إلا أنه يبدو معقد والأفضل منه نجد:

$$\begin{aligned} {}^{١٠٠}P_{٩٦} &= ١٠٠! - ٩٦! = ٩٦! \dots \\ &= \frac{١٠٠ \times ٩٩ \times ٩٨ \times ٩٧}{٤!} \end{aligned}$$

حيث:

يراعى أننا نلجأ للمتعم الحسابي في الأعداد الكبيرة لسهولة الحصول على النتائج.

مثال (٣): بكم طريقة يمكن اختيار ٧ طلاب من بين ٩١٠

الحل

$$\text{عدد الطرق} = ١٠! = \frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{١ \times ٢ \times ٣} = ١٢٠ \text{ طريقة}$$

الخلاصة: ${}^nP_r = n(n-1)(n-2)\dots$

ثالثاً: نظرية ذات الحدين:

تهدف الدراسة إلى الوصول لمفكوك حاصل جمع حدين مرفوعاً لقوة معينة، بفرض الحد الأول (س) والحد الثاني (پ) وحاصل الجمع الجبري مرفوعاً إلى (ن).

أي أن: $(س ± پ)^ن$ بمعنى أن المقدار $(س ± پ)$ مضروباً في نفسه عدد من المرات $ن =$ ويمكن التدرج في تطبيق القاعدة كما يلي:

$$(س + پ)^1 = س + پ$$

$$(س + پ)^2 = س^2 + 2سپ + پ^2$$

$$(س + پ)^3 = س^3 + 3س^2پ + 3سپ^2 + پ^3$$

$$(س + پ)^4 = س^4 + 4س^3پ + 6س^2پ^2 + 4سپ^3 + پ^4$$

ويمكن وضع المفكوك في الطرف الأيسر في الصورة:

$$(س + پ)^4 =$$

$س^4 + 4س^3پ + 6س^2پ^2 + 4سپ^3 + پ^4$
وهذه القاعدة تحقق إفادة للطلاب للوصول إلى النتائج بأفضل وأيسر الطرق وبسهولة.

ملاحظات هامة:

- ❖ عدد الحدود في المفكوك يزيد بمقدار واحد عن القوة المرفوع لها المقدار الأصلي.
- ❖ مجموع الأسس في أي حد في المفكوك يساوي القوة المرفوع لها المقدار الأصلي.
- ❖ القوة المرفوع لها الحد الأول (س) تبدأ في المفكوك بالقوة المرفوع لها المقدار الأصلي وتتناقص بالتدرج إلى أن تصل إلى الصفر.
- ❖ القوة المرفوع لها الحد الثاني (أ) تبدأ بالصفر وتزايد بالتدرج حتى تصل إلى القوة المرفوع لها المقدار الأصلي.
- ❖ معامل (أ س) يبدأ بعدد طرق الاختيار وتطبيق قواعد التوافق للقوة المرفوع لها المقدار الأصلي ويتزايد الدليل من صفر إلى القوة المرفوع لها المقدار الأصلي.

وبتطبيق هذه الملاحظات نجد أن:

$$= {}^4(p + s)$$

$${}^4p \cdot {}^4s + {}^4p \cdot {}^3s + {}^3p \cdot {}^4s + {}^2p \cdot {}^4s + {}^4p \cdot {}^4s + {}^4p \cdot {}^4s$$

مثال (١): أوجد مفكوك المقدار: ${}^6(s + 3)$

الحل

$${}^6(s + 3) = {}^6p \cdot {}^6s + {}^6p \cdot {}^5s + {}^5p \cdot {}^6s + {}^4p \cdot {}^6s + {}^6p \cdot {}^4s + {}^6p \cdot {}^3s$$

$$+ {}^6p \cdot {}^2s + {}^2p \cdot {}^6s + {}^6p \cdot {}^0s + {}^0p \cdot {}^6s + {}^6p \cdot {}^6s$$

ومنها:

$${}^6(s + 3) = {}^6p \cdot {}^6s + {}^6p \cdot {}^5s + {}^5p \cdot {}^6s + {}^4p \cdot {}^6s + {}^6p \cdot {}^4s + {}^6p \cdot {}^3s$$

$$+ {}^6p \cdot {}^2s + {}^2p \cdot {}^6s + {}^6p \cdot {}^0s + {}^0p \cdot {}^6s + {}^6p \cdot {}^6s$$

$$+ {}^6p \cdot {}^6s$$

$$= {}^6s + {}^{18}s + {}^{135}s + {}^{540}s + {}^{1260}s + {}^{1260}s$$

$$+ {}^{729}s + {}^{1458}s + {}^{729}s$$

مثال (٢): أوجد مفكوك المقدار: ${}^4(s + 5)$

الحل

$${}^4(s + 5) = {}^4p \cdot {}^4s + {}^4p \cdot {}^3s + {}^3p \cdot {}^4s + {}^2p \cdot {}^4s + {}^4p \cdot {}^2s + {}^4p \cdot {}^1s$$

$$+ {}^4p \cdot {}^0s + {}^0p \cdot {}^4s + {}^4p \cdot {}^4s$$

$$= {}^4s + {}^{12}s + {}^{36}s + {}^{60}s + {}^{120}s + {}^{120}s$$

$$+ {}^{60}s + {}^{120}s + {}^{60}s + {}^{120}s + {}^{60}s + {}^{120}s$$

ومن الصورة العامة لمفكوك نظرية ذات الحدين يمكن استنتاج الحد العام

ونرمز له بالرمز (E_r) .

حيث:

$$E_r = {}^r p \cdot {}^{n-r} s - {}^{r-1} p \cdot {}^{n-r+1} s + {}^{r-2} p \cdot {}^{n-r+2} s - \dots + {}^1 p \cdot {}^{n-1} s - {}^0 p \cdot {}^n s$$

مثال (٣): أوجد الحد الخامس والحد السابع في مفكوك المقدار: $(س + ٨)^{١٢}$

الحل

$$ع = س = ١ - س - (٢) ١ - س - (س) ١ + س - ١$$

$$ع = ٥ = ١٢ (٨) (س) ٤$$

$$ع = ٧ = ١٢ (٨) (س) ٦$$

وبلاحظ أنه يمكن أن تكون الإشارة بين الحدين سالبة فتؤخذ في الاعتبار.

مثال (٤): أوجد مفكوك المقدار: $(س - ٥)^٧$

الحل

$$(س - ٥)^٧ = ٧ (س - ٥) ٠ (س - ٥) ٦ + ٧ (س - ٥) ١ (س - ٥) ٥ + ٧ (س - ٥) ٢ (س - ٥) ٤$$

$$+ ٧ (س - ٥) ٣ (س - ٥) ٤ + ٧ (س - ٥) ٤ (س - ٥) ٣ + ٧ (س - ٥) ٥ (س - ٥) ٢$$

$$+ ٧ (س - ٥) ٦ (س - ٥) ١ + ٧ (س - ٥) ٧ (س - ٥) ٠$$

يمكن أن نكتفي بالمفكوك في هذه الصورة لضخامة الأعداد.

مثال (٥): أوجد الحد الرابع والحد الخامس في مفكوك المقدار: $(س - ٣)^٧$

الحل

$$ع = س = ١ - س - (٢) ١ - س - (س) ١ + س - ١$$

$$ع = ٤ = ٣ (٣ - س) ٣ (س - ٣) ٤ = ٩٤٥ س$$

$$ع = ٥ = ٣ (٣ - س) ٤ (س - ٣) ٣ = ٢٨٣٥ س$$

مثال (٦): أوجد الحد الثالث والحد الخامس في مفكوك المقدار: $(س + ٤)^٦$

الحل

$$ع = س = ١ - س - (٢) ١ - س - (س) ١ + س - ١$$

$$ع = ٣ = ٢ (٤ + س) ٢ (س + ٤) ٤ = ٢٤٠ س$$

$$ع = ٥ = ٢ (٤ + س) ٤ (س + ٤) ٢ = ٣٨٤٠ س$$

مثال (٧): أوجد الحد الرابع في مفكوك المقدار: $(س - ٨)^٦$

الحل

$$ع = ٤ = ٢ (٨ - س) ٣ (س - ٨) ٣ = ٢٧٦٤٨٠ س$$

تطبيقات نظرية ذات الحدين

١ / أوجد مفكوك المقدار $(٣س - ٥)٤$

٢ / أوجد الحد الثالث والرابع في مفكوك المقدار $(٣س - ٣)٧$

٣ / أوجد الحد الخامس في مفكوك المقدار $(٤س + ٤)٩$

٤ / أوجد مفكوك المقدار $(٥س + ٣ص)٤$

المحتويات العددية

تعريف: هي مجموعة أعداد الفرق بين كل عددين متتاليين ثابت ويسمى الأساس.

الصورة العامة للمتوالية العددية:

$$s(1-\alpha)+p, \dots, \dots, s^2+p, s^2+p, s+p, p$$

حيث:

م = الحد الأول = ١٤

$s = \text{الأساس} = \text{الفرق الثابت}$

$$n = \text{عدد الحدود}$$

$$s(1-v) + p = \text{الحد الأخير} = J = \text{ع}$$

مجموع المتوالية العددية (ج):

$$(1) \quad (J + P) \frac{z}{y} = \frac{z}{y}$$

$$(r) \quad [s(1-u) + pr] \frac{u}{r} = \rightarrow$$

مثال (١): في المتوالية العددية:

....., ۲۳, ۱۸, ۱۳, ۸, ۳

١ / الحد العاشر هو:

أ) ٣٧ ب) ٧٧ ج) ٤٧ د) ٤٤

٢ / الحد الخامس عشر هو:

۷۳ (ا) ۳۳ (ب) ۷۷ (ج) ۳۷ (د)

٣ / مجموع الحدود الثمانية الأولى هو:

١٤٦ (أ) ١٦٤ (ب) ٤١٦ (ج) ٦٤١ (د)

٤ / مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

ا) ۰۰۰ ب) ۰۲۰ ج) ۰۰۲ د) ۲۰۰

الحل

حيث $5 = s$ ، $3 = p$ ، الأساس = 5

$$48 = 5 \times 9 + 3 = 5(1 - 10) + p = 10ع$$

$$73 = 5 \times 14 + 3 = 5(1 - 15) + p = 15ع$$

مجموع الحدود الثمانية الأولى:

$$[5(1 - 10) + p \times 2] \frac{1}{2} = \rightarrow$$

$$164 = [5(1 - 8) + 3 \times 2] \frac{1}{2} =$$

حل آخر

$$38 = 5 \times 7 + 3 = 57 + p = 8ع$$

$$164 = (38 + 3) \frac{1}{2} = (J + p) \frac{1}{2} = \rightarrow$$

مجموع الحدود العشرة الأولى:

$$[5(1 - 10) + p \times 2] \frac{1}{2} = \rightarrow$$

$$255 = [5 \times 9 + 3 \times 2] \frac{10}{2} =$$

حل آخر

$$48 = 5 \times 9 + 3 = 59 + p = 10ع$$

$$255 = (48 + 3) \frac{10}{2} = (J + p) \frac{10}{2} = \rightarrow$$

مثال (٢): في المتوالية العددية:

..... ، ، ، ٢٣ ، ٢٠ ، ١٧ ، ١٤

١٤ (د)

٤٤ (ج)

١١ (ب)

٤١ (أ)

٥ / الحد العاشر هو:

٣٣ (د)

٣٥ (ج)

٥٥ (ب)

٥٣ (أ)

٦ / الحد الثامن هو:

٣٧

٧/ الفرق بين الحدين العاشر والسادس هو:

أ) ١٢ ب) ٢٢ ج) ١١ د) ٢١

٨/ مجموع الحدين الخامس والتاسع هو:

أ) ٦٦ ب) ٤٤ ج) ٤٦ د) ٦٤

الحل

حيث $p = 14$ ، $s = \text{الأساس} = 3$

$$ع١ = 3 \times 9 + 14 = s(1 - 10) + p = 10ع$$

$$ع٨ = 3 \times 7 + 14 = s(1 - 8) + p = 8ع$$

الفرق بين الحدين العاشر والسادس:

$$ع١ = 10ع$$

$$ع٩ = 3 \times 5 + 14 = s(1 - 6) + p = 6ع$$

$$ع١٢ = 29 - ع١ = 6ع - 10ع$$

مجموع الحدين الخامس والتاسع:

$$ع٥ = 3 \times 4 + 14 = s(1 - 5) + p = 5ع$$

$$ع٩ = 3 \times 8 + 14 = s(1 - 9) + p = 9ع$$

$$ع٦٤ = 26 + 38 = 5ع + 9ع$$

مثال (٣): متوالية عددية مجموع حديها الثاني والخامس هو ٢٤ والفرق بين حديها السابع

والثالث - ١٦

٩/ المتوالية هي:

أ) ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ،

ب) ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٧ ، ،

ج) ١١ ، ١٤ ، ١٧ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ،

د) ١٩ ، ٢٥ ، ٣١ ، ٣٧ ، ٤٣ ، ،

١٠ / الحد العاشر هو: (أ) ٧٤ (ب) ٤٠ (ج) ٤٧ (د) ٧٠

١١ / مجموع الحدين الثالث والعاشر هو:

(أ) ٥٦ (ب) ٦٦ (ج) ٦٥ (د) ٥٥

١٢ / الفرق بين الحدين الثاني عشر والخامس هو:

(أ) ٨٨ (ب) ٢٢ (ج) ٢٨ (د) ٨٢

الحل

$$٤٢ = ٥ع + ٢ع$$

$$(١) \Leftrightarrow ٤٢ = ٥٥ + ٢٢ = ٥٤ + ٢ + ٥ + ٢$$

$$\boxed{٤ = ٥} \quad \text{وبالتعويض في (١):} \quad ١٦ = ٥٤ = ٥٢ - ٢ - ٥٦ + ٢ = ٣ع - ٧ع$$

وبالتعويض في (١):

$$\boxed{١١ = ٢} \quad ٤٢ = ٤ \times ٥ + ٢٢$$

المتوالية هي:

..... ، ، ، ٢٧ ، ٢٣ ، ١٩ ، ١٥ ، ١١

$$٤٧ = ٤ \times ٩ + ١١ = ٥٩ + ٢ = ١٠ع$$

مجموع الحدين الثالث والعاشر = $٤٧ + ١٩ = ٦٦$

الفرق بين الحدين الثاني عشر والخامس عشر:

$$٢٧ = ٤ \times ٤ + ١١ = ٥ع$$

$$٥٥ = ٤ \times ١١ + ١١ = ١٢ع$$

$$٢٨ = ٢٧ - ٥٥ = ٥ع - ١٢ع \therefore$$

مثال (٤): في المتوالية العددية:

..... ، ، ، ٧٥ ، ٨٢ ، ٨٩ ، ٩٦ ، ١٠٣

١٣ / الحد السادس عشر هو: (أ) ٤٧ (ب) ٢٦ (ج) ٢+ (د) ٢-

١٤ / الحد الثاني عشر هو: (أ) ٢٦ (ب) ٦٢ (ج) ٦٦ (د) ٢٢

١٥ / الحد السادس هو: (أ) ٨٨ (ب) ٦٨ (ج) ٦٦ (د) ٨٦

١٦ / مجموع الحدين الخامس والتاسع هو:

(أ) ٢١١ (ب) ١٢١ (ج) ١٢٢ (د) ٢١٢

١٧ / مجموع الحدين الرابع والرابع عشر هو:

٩٤ (د)

٤٤ (ج)

٩٩ (ب)

٤٩ (أ)

مثال (٥): متوالية عددية مجموع حديها الرابع والسابع هو ١١٣ والفرق بين الحدين الخامس

والثالث = ١٤

١٨ / الحد السابع هو: (أ) ٧٦ (ب) ٦٧ (ج) ٧٧ (د) ٦٦

١٩ / الحد الرابع هو: (أ) ٤٦ (ب) ٦٦ (ج) ٦٤ (د) ٤٤

٢٠ / الحد الخامس هو: (أ) ٣٥ (ب) ٥٥ (ج) ٣٣ (د) ٥٣

٢١ / مجموع الحدين الثاني والعاشر هو:

١٠٢ (د)

١٢٠ (ج)

٢٠١ (ب)

٢١٠ (أ)

مثال (٦): في المتوالية العددية:

٣ ، ١١ ، ١٩ ، ٢٧ ، ، ، ،

٢٢ / الحد العاشر هو: (أ) ٥٧ (ب) ٧٥ (ج) ٧٧ (د) ٥٥

٢٣ / الحد الخامس عشر هو: (أ) ١٥١ (ب) ٥١١ (ج) ١١٥ (د) ١٥٥

٢٤ / مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

٣٩٠ (د)

٣٠٩ (ج)

٩٠٣ (ب)

٩٣٠ (أ)

٢٥ / مجموع الحدود الخمسة عشرة الأولى هو:

٨٨٨ (د)

٥٨٨ (ج)

٨٨٥ (ب)

٥٥٨ (أ)

مثال (٧): متوالية عددية مجموع الحدين الثالث والعاشر = ١١٢ والفرق بين الحدين السابع

والرابع = ٢٤

٢٦ / المتوالية هي:

(أ) ١٢ ، ٢٠ ، ٢٨ ، ٣٦ ، ٤٤ ، ، ،

(ب) ٢٨ ، ٣٦ ، ٤٤ ، ٥٢ ، ٦٠ ، ، ،

(ج) ٣٦ ، ٤٠ ، ٤٤ ، ٤٨ ، ٥٢ ، ، ،

(د) ٨ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٢ ، ٤٠ ، ، ،

٢٧ / الحد العاشر في المتوالية هو: (أ) ٤٨ (ب) ٨٤ (ج) ٨٨ (د) ٤٤
٢٨ / مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

(أ) ٨٤٠ (ب) ٨٠٤ (ج) ٤٠٨ (د) ٤٨٠
٢٩ / الفرق بين الحدين التاسع والخامس هو:

(أ) ٣٣ (ب) ٢٢ (ج) ٣٣ (د) ٢٣
٣٠ / مجموع الحدود الستة الأولى هو:

(أ) ٩٢١ (ب) ٩١٢ (ج) ١٩٢ (د) ١٢٩

مثال (٨): في المتوالية العددية:

٨ ، ١٤ ، ٢٠ ، ٢٦ ، ٣٢ ، ، ،

٣١ / الحد العاشر هو: (أ) ٢٢ (ب) ٦٦ (ج) ٢٦ (د) ٦٢

٣٢ / الحد الخامس عشر هو (أ) ٩٢ (ب) ٢٩ (ج) ٩٩ (د) ٢٢

٣٣ / الفرق بين الحدين الثاني عشر والرابع هو:

(أ) ٨٨ (ب) ٤٨ (ج) ٤٤ (د) ٨٤
٣٤ / مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

(أ) ٥٣٠ (ب) ٥٠٣ (ج) ٣٥٠ (د) ٣٠٥

مثال (٩): في المتوالية العددية:

٩٦ ، ٩٢ ، ٨٨ ، ٨٤ ، ، ،

٣٥ / الحد السابع هو: (أ) ٢٢ (ب) ٧٢ (ج) ٧٧ (د) ٢٧

٣٦ / الفرق بين الحدين الثالث والتاسع هو

(أ) ٤٤ (ب) ٢٢ (ج) ٤٢ (د) ٢٤

٣٧ / مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

(أ) ٧٨٠ (ب) ٨٧٠ (ج) ٧٠٨ (د) ٨٠٧

٣٨ / مجموع الحدود الخمسة عشر الأولى هو:

(أ) ٢١٠٠٠ (ب) ٢٠١٠ (ج) ١٠٢٠ (د) ١٢٠٠

مثال (١٠) : في المتوالية العددية:

..... ، ، ، ٧٦ ، ٧٢ ، ٦٨ ، ٦٤ ، ٦٠ ، ٥٦

٣٩ / الفرق بين الحدين الحادي عشر والثالث هو:

(أ) ٣٣ (ب) ٢٣ (ج) ٢٢ (د) ٣٢

٤٠ / مجموع الحدين الثالث والثامن هو

(أ) ١٤٨ (ب) ٤١٨ (ج) ٨١٤ (د) ١٨٤

٤١ / مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

(أ) ٤٧٠ (ب) ٧٤٠ (ج) ٧٠٤ (د) ٤٠٧

٤٢ / الحد الخامس عشر هو:

(أ) ١١٣ (ب) ١٢١ (ج) ٢١١ (د) ٢٢١

مثال (١١) : متوالية عددية مجموع الحدين الثالث والرابع - ٧٦ والفرق بين الحدين الثامن

والخامس - ١٨ ، فإن:

٤٣ / مجموع الحدود التسعة الأولى هو: (أ) ٤٣٢ (ب) ٣٤٢ (ج) ٤٢٣ (د) ٢٣٤

مثال (١٢) : ادخل خمسة أوساط عددية بين الرقمين (٤٣ ، ٨٥) بحيث تكون جميعها متوالية عددية.

٤٤ / المتوالية هي:

(أ) ٣٤ ، ٣٨ ، ٤٢ ، ٤٦ ، ٥٠ ، ، ،

(ب) ٧٥ ، ٨٠ ، ٨٥ ، ٩٠ ، ٩٥ ، ، ،

(ج) ٤٣ ، ٥٠ ، ٥٧ ، ٦٤ ، ٧١ ، ، ،

(د) ٣٨ ، ٤٦ ، ٥٤ ، ٦٢ ، ٧٠ ، ، ،

٤٥ / مجموع الحدود العشرة الأولى من المتوالية هو:

(أ) ٧٥٤ (ب) ٤٥٧ (ج) ٧٤٥ (د) ٤٧٥

تطبيقات على المتواليات العددية

١ / متوالية عددية الفرق بين الحدين الثامن والثالث = ٢٠، ومجموع الحدين الثاني والسابع = ١٣٤. أوجد المتوالية، ثم أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى.

٢ / أوجد الحد السادس عشر ومجموع العشرين حداً الأولى من المتوالية:
٣٣ ، ٤٤ ، ٥٥ ، ٦٦ ، ، ،

٣ / متوالية عددية الفرق بين الحدين التاسع والثالث = ٤٨، ومجموع حديها الرابع والثامن = ١٠٦، أوجد المتوالية ثم أوجد مجموع العشرين حداً الأولى منها.

٤ / متوالية عددية مجموع الحدين الثاني والخامس = ١٢٢، والفرق بينهما = ٤٨، أوجد المتوالية ثم أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى منها.

٥ / متوالية عددية حدها الأول = ١٣، ومجموع ن من الحدود الأولى = ٤٢٠ وأساسها = ٤ أوجد المتوالية ثم أوجد مجموع العشرين حداً الأولى منها.

الفصل الخامس

المتواليات الهندسية

تعريف: المتوالية الهندسية هي مجموعة أعداد خارج قسمة كل عددين متتاليين ثابت ويسمى الأساس ونرمز له بالرمز (r).

الصورة العامة للمتوالية الهندسية:

$$p, \quad p r^1, \quad p r^2, \quad p r^3, \quad \dots, \quad p r^{n-1}$$

حيث:

$$p = \text{الحد الأول}$$

$$r = \text{الأساس} = \text{خارج القسمة الثابت}$$

$$n = \text{عدد الحدود}$$

$$E_n = \text{الحد العام} = p r^{n-1}$$

إيجاد مجموع المتوالية الهندسية:

$$r < 1 \quad \Rightarrow \quad S_n = p \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$r > 1 \quad \Rightarrow \quad S_n = p \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$r = 1 \quad \Rightarrow \quad S_n = p \frac{n}{1 - r} = \infty$$

مثال (١): أوجد الحد الثامن ومجموع الحدود الثمانية الأولى من المتوالية الهندسية:

$$12, \quad 24, \quad 48, \quad 96, \quad \dots$$

الحل

$$E_n = p r^{n-1}$$

$$E_8 = 12 (2)^{7} = 1536$$

$$S_8 = \frac{1 - 2^8}{1 - 2} \times 12 = \frac{1 - 256}{1 - 2} \times 12 = 3060$$

مثال (٢): أوجد الحد السابع ومجموع الحدود السبعة الأولى في المتوالية:

..... ، ، ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٩٦

الحل

$$٧٤ = ٩٦ \cdot r^{٦-١} = ٩٦ \cdot \left(\frac{١}{٢}\right)^٦ = ١,٥$$

$$٧ = \frac{١ - r^٧}{١ - r} \times ٩٦ = \frac{١ - ١,٥^٧}{١ - ١,٥} \times ٩٦ = ١٩٠,٥$$

$$١٩٠,٥ = \frac{١ - ١,٥^٧}{١ - ١,٥} \times ٩٦ =$$

مثال (٣): في المتوالية الهندسية:

..... ، ، ، ٢١٦ ، ٧٢ ، ٢٤ ، ٨

١/ الحد الخامس هو:

(د) ٨٦٤

(ج) ٨٤٦

(ب) ٤٨٦

(أ) ٦٤٨

٢/ الحد العاشر هو:

(د) ١٧٥٤٦٤

(ج) ٤٦٤١٥٧

(ب) ١٥٧٤٦٤

(أ) ١٥٠٤٦٤

٣/ مجموع الحدود الخمسة الأولى هو:

(د) ٦٩٨

(ج) ٩٦٨

(ب) ٦٨٩

(أ) ٨٦٩

٤/ مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

(د) ٢٣٦١٩٢

(ج) ٢٠٦١٩٢

(ب) ١٩٢٢٣٦

(أ) ٢٦٣١٩٢

الحل

$$٥٤ = ٨ \cdot r^{٣-١} = ٨ \cdot r^٢ = ٦٤٨$$

$$١٠٤ = ٨ \cdot r^{٩-١} = ٨ \cdot r^٨ = ١٥٧٤٦٤$$

مجموع الحدود الخمسة الأولى:

$$٩٦٨ = \frac{١ - r^٥}{١ - r} \times ٨ = \frac{١ - ٣}{١ - ٣} \times ٨ = ٩٦٨$$

مجموع الحدود العشرة الأولى:

$$236192 = \frac{1 - 10^3}{1 - 3} \times 8 = \frac{1 - 10^3}{1 - 3} \times p = \text{ج}$$

مثال (٤): في المتوالية الهندسية:

..... ، ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨

١/ مجموع المتوالية هو:

أ) ٦٦ ب) ٩٦ ج) ٩٩ د) ٦٩

٢/ الحد الخامس هو:

أ) ٩ ب) ٧ ج) ٨ د) ٣

مثال (٥): في المتوالية الهندسية:

..... ، ، ٢١٦ ، ٧٢ ، ٢٤ ، ٨

١/ الحد السابع هو:

أ) ٥٨٣٢ ب) ٢٣٥٨ ج) ٥٨٠٢ د) ٣٥٨٢

٢/ الحد الثامن هو:

أ) ١٤٦٧٩ ب) ٩٧٦٤١ ج) ١٧٤٩٦ د) ٤٩٦٧١

٣/ مجموع الحدود الخمسة الأولى هو:

أ) ٨٦٩ ب) ٦٩٨ ج) ٦٨٩ د) ٩٦٨

٤/ مجموع الحدود الثمانية الأولى هو:

أ) ٢٢٠٦٤ ب) ٢٦٢٤٠ ج) ٤٠٢٢٦ د) ٦٢٤٠٢

مثال (٦): في المتوالية الهندسية:

..... ، ، ١٣٥ ، ٤٥ ، ١٥ ، ٥

١/ الحد السادس هو:

أ) ١٢١٥ ب) ١١٢٥ ج) ٥٢١١ د) ٥١٢١

٢/ الحد العاشر هو:

أ) ١٤٥٨٩ ب) ٥١٤٩٨ ج) ٩٨٤١٥ د) ٥٨٩١٤

٣/ مجموع الحدود الستة الأولى هو:

(أ) ١٢٠٨ (ب) ١٨٢٠ (ج) ٢٠١٨ (د) ٨١٢٠

٤/ مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

(أ) ٤٠١٢٦٧ (ب) ١٢٦٧٠٤ (ج) ٢١٤٠٧٦ (د) ١٤٧٦٢٠

مثال (٧): في المتوالية الهندسية:

١٥ ، ٤٥ ، ١٣٥ ، ٤٠٥ ، ،

١/ الحد السابع هو:

(أ) ٣٠١٩٥ (ب) ١٠٩٣٥ (ج) ٩٥٣١٠ (د) ٥١٠٣٩

٢/ الحد العاشر هو:

(أ) ٤٩٥٥٢٢ (ب) ٥٥٢٢٤٩ (ج) ٢٢٤٥٩٥ (د) ٢٩٥٢٤٥

٣/ مجموع الحدود السبعة الأولى هو:

(أ) ٩٦٥٣١ (ب) ١٣٥٦٩ (ج) ١٦٣٩٥ (د) ٣٥٩٦١

مثال (٨): متوالية هندسية حدودها:

١١ ، ٤٤ ، ١٧٦ ، ،

١/ الحد السادس هو:

(أ) ١١٢٦٤ (ب) ٢١٤١٦ (ج) ٦٤٢١١ (د) ٠٢١٦٤١

٢/ مجموع الحدود الستة الأولى هو:

(أ) ٥١٥١٠ (ب) ١١٥٥٠ (ج) ٥٥٠١١ (د) ١٥٠١٥

٣/ الحد التاسع هو:

(أ) ٧٢٠٨٩٦ (ب) ٩٨٧٦٢٠ (ج) ٦٧٨٩٠٢ (د) ٢٠٦٧٨٩

مثال (٩): في المتوالية الهندسية:

٧ ، ٢١ ، ٦٣ ، ١٨٩ ، ،

١/ الحد السابع هو: (أ) ١٣٠٥ (ب) ٥١٠٣ (ج) ١٠٥٣ (د) ٣٥٠١

٧٨٤ (د) ٨٧٤ (ج) ٤٧٨ (ب) ٨٤٧ (ا)

(أ) ٦٠٢٧ (ب) ٢٦٩٠ (ج) ٢٩٠٦ (د) ٦٠٢٧

$$01.3 = {}^7(r) v = {}^7 \sim p = v \mathcal{E}$$
$$\Delta E V = \frac{1 - 0.3}{1 - 3} \times V = \frac{1 - 2}{1 - 1} \times P = 0$$
$$2297. = \frac{1 - \lambda^2(r)}{1 - r} \times v = \frac{1 - \lambda^2}{1 - r} \times p = \lambda^2$$

..... ' ' ' ३२६ ' १०८ ' ३६ ' १२

(أ) ٤٣٦٤ (ب) ٤٣٦٤ (ج) ٣٤٨٦ (د) ٦٨٤٣

(أ) ٤٤٢٢٦ (ب) ٦٢٤٢٤ (ج) ٤٢٤٢٦ (د) ٢٦٢٤٤

(أ) ٣٩٣٦ (ب) ٣٣٠٦٩ (ج) ٩٦٠٣٣ (د) ٩٠٣٦٣

۳ = √ ۱۲ = p

$$E_{37A} = \frac{1 - r^2(r)}{1 - r} \times 12 = \frac{1 - 25}{1 - 5} \times 12 = 24$$

٢ / الحد الثامن هو: $u = 8$

$$26244 = {}^v(3) 12 = {}^v r p = {}^{1-u} r p = 8$$

٣ / مجموع الحدود الثمانية الأولى: $u = 8$

$$39360 = \frac{1 - {}^{\wedge}(3)}{1 - 3} \times 12 = \frac{1 - {}^{\sim}}{1 - r} \times p = 8$$

مثال (١١): في المتوالية الهندسية:

١٤ ، ٢٨ ، ٥٦ ، ١١٢ ، ، ، ،

٤ / الحد العاشر هو:

(د) ٨٧١٦

(ج) ٨٧٦١

(ب) ١٦٧٨

(أ) ٧١٦٨

٥ / الحد الثاني عشر هو:

(د) ٧٨٢٢٦

(ج) ٨٢٦٢٧

(ب) ٢٨٦٧٢

(أ) ٢٢٦٧٨

٦ / مجموع الحدود الثمانية الأولى هو:

(د) ٧٠٣٥

(ج) ٥٠٧٣

(ب) ٣٥٧٠

(أ) ٣٠٧٥

الحل

$$2 = r$$

$$14 = p$$

٤ / الحد العاشر: $u = 10$

$$7168 = {}^9(2) 14 = {}^9 r p = {}^{1-u} r p = 10$$

٥ / الحد الثاني عشر: $u = 12$

$$28672 = {}^{11}(2) 14 = {}^{11} r p = {}^{1-u} r p = 12$$

٦ / مجموع الحدود الثمانية الأولى: $u = 8$

$$3570 = \frac{1 - {}^{\wedge}(2)}{1 - 2} \times 14 = \frac{1 - {}^{\sim}}{1 - r} \times p = 8$$

مثال (١٢): في المتوالية الهندسية:

..... ، ، ، ١٩٢ ، ٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ١٢

٧/ الحد التاسع هو:

(أ) ٧٢.٣ (ب) ٧٠.٢٣ (ج) ٢٠.٣٧ (د) ٣٠.٧٢

٨/ مجموع الحدود التسعة الأولى هو:

(أ) ١٢٣٦ (ب) ٦١٣٢ (ج) ٦٣٢١ (د) ٢٦١٣

٩/ مجموع الحدود الخمسة عشرة الأولى هو:

(أ) ٢٣٣٤٠.٩ (ب) ٩٤٠٣٣٢ (ج) ٢٣٤٠٣٩ (د) ٣٩٣٢٠.٤

الحل

$$١٢ = p \quad ٢ = r$$

٧/ الحد التاسع: $r = ٩$

$$٣٠.٧٢ = ٩ = p \cdot r^{٨} = p \cdot ٢^{٨} = ١٢ \cdot ٢^{٨} = ٣٠.٧٢$$

٨/ مجموع الحدود التسعة الأولى: $r = ٩$

$$٦١٣٢ = ٨ = p \cdot r^{٨} = p \cdot ٢^{٨} = ١٢ \cdot ٢^{٨} = ٦١٣٢$$

٩/ مجموع الحدود الخمسة عشرة الأولى: $r = ١٥$

$$٣٩٣٢٠.٤ = ١٥ = p \cdot r^{١٥} = p \cdot ٢^{١٥} = ١٢ \cdot ٢^{١٥} = ٣٩٣٢٠.٤$$

مثال (١٣): في المتوالية الهندسية:

..... ، ، ، ٩٦٠ ، ٢٤٠ ، ٦٠ ، ١٥

١٠/ مجموع الحدود الخمسة الأولى هو:

(أ) ٥١١٥ (ب) ٥٥١١ (ج) ١١٥٥ (د) ١٥١٥

الحل

٥٠

$$0 = r$$

$$4 = r$$

$$10 = p$$

$$0110 = \frac{1 - 0(4)}{1 - 4} \times 10 = \frac{1 - r}{1 - r} \times p = 0$$

مثال (١٤): في المتوالية الهندسية:

..... ، ، ، ١٠٢٩ ، ١٤٧ ، ٢١ ، ٣

١١ / الحد الثامن هو:

(د) ٧٤٩٠٢٢٦

(ج) ٢٢٤٠٦٧٩

(ب) ٩٧٠٦٤٢٢

(أ) ٢٤٧٠٦٢٩

١٢ / مجموع الحدود الأربعة الأولى هو:

(د) ١٢٠٠

(ج) ١٠٠٢

(ب) ٢٠٠١

(أ) ٢١٠٠

الحل

$$r = 7$$

$$p = 3$$

١١ / الحد الثامن:

$$r = 8$$

$$2470629 = 3(r)^7 = 3r^7 = 3r^{1-8} = 3r^8$$

١٢ / مجموع الحدود الأربعة الأولى:

$$r = 4$$

$$1200 = \frac{1 - 4(7)}{1 - 7} \times 3 = \frac{1 - r}{1 - r} \times p = 4$$

مثال (١٥): في المتوالية الهندسية:

..... ، ، ، ١٣٥ ، ٤٥ ، ١٥ ، ٥

١٣ / الحد العاشر هو:

(د) ٨٩٥١٤

(ج) ٥٩١٤٨

(ب) ١٤٥٨٩

(أ) ٩٨٤١٥

١٤ / مجموع الحدود الثمانية الأولى هو:

(د) ١٦٤٠٠

(ج) ١٠٠٤٦

(ب) ٦٠٠١٤

(أ) ٤٠٠١٦

الحل

$$r = 3$$

$$p = 0$$

٥١

١٣ / الحد العاشر: $10 = u$

$$98410 = {}^9(3)5 = {}^9rP = {}^{10}rP = 10.2$$

١٤ / مجموع الحدود الثمانية الأولى: $8 = u$

$$16400 = \frac{1 - {}^8(3)}{1 - 3} \times 5 = \frac{1 - {}^8r}{1 - r} \times P = 8.ج$$

مثال (١٦): في المتوالية الهندسية:

..... ، ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٩٦

١٥ / مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية هو:

٢٩١ (د)

٢١٩ (ج)

١٢٩ (ب)

١٩٢ (أ)

الحل

$$192 = \frac{96}{0.5 - 1} = \frac{P}{1 - r} = \infty.ج$$

تطبيقات على المتواليات الهندسية

١ / أوجد الحد السادس ومجموع الحدود الثمانية الأولى في المتوالية الهندسية:
..... ، ، ٢١٦ ، ٧٢ ، ٢٤ ، ٨

٢ / أوجد الحد الخامس ومجموع الحدود الثمانية الأولى في المتوالية الهندسية:
..... ، ، ١٠٨ ، ٣٢٤ ، ٩٧٢

٣ / أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى في المتوالية الهندسية:
..... ، ، ٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ٦

٤ / أوجد الحد الثامن في المتوالية الهندسية:

..... ، ، ١٦٢ ، ٥٤ ، ١٨ ، ٦

٥ / أوجد مجموع المتوالية الهندسية:

..... ، ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٩٦

الفصل السادس

الاحتمالات

تعريف:

الاحتمال هو حدث غير مؤكد الوقوع بمعنى أنه يمكن تحقيقه ويمكن عدم تحقيقه. وتحدد قيمة الاحتمال رياضياً بتحديد عدد الحالات الكلية لتحقق حدث معين، وعدد الحالات الموافقة لتحقق هذا الحدث.

ولتوضيح ذلك، لنفرض أن كل ١٠٠٠ طالب يتقدمون لامتحان الرياضة ينجح منهم ٩٠٠ طالب وعلى ذلك فإن عدد الحالات الكلية ١٠٠٠ أما عدد الحالات الموافقة لحدث النجاح هو ٩٠٠ وأيضاً عدد الحالات الموافقة لحدث الرسوب هو ١٠٠ وتأسيساً على ذلك:

$$\text{احتمال النجاح} = \frac{\text{عدد حالات النجاح}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{٩٠٠}{١٠٠٠} = ٠,٩$$

$$\text{احتمال الرسوب} = \frac{\text{عدد حالات الرسوب}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{١٠٠}{١٠٠٠} = ٠,١$$

$$\text{مجموع الاحتمالين} = ٠,٩ + ٠,١ = ١$$

نخلص من ذلك إلى مجموعة ملاحظات:

- ❖ الاحتمال عبارة عن كسر حقيقي موجب يتراوح بين الصفر والواحد الصحيح.
- ❖ تنعدم قيمة الاحتمال وتساوي الصفر إذا كان الاحتمال مستحيل تحقيقه.
- ❖ تصل قيمة الاحتمال إلى الواحد الصحيح في حالة التأكد التام أو المطلق من تحقق الحادث.

مثال (١): ألقيت زهرة طاولة مرة واحدة على سطح أملس، أحسب:

١/ احتمال ظهور رقم ٥.

٢/ احتمال ظهور رقم ٢.

٣/ احتمال ظهور رقم ٧.

الحل

زهرة الطاولة مكعب له ستة أوجه، كل وجه عليه رقم من (١) إلى (٦).

عدد الحالات الكلية = ٦

عدد الحالات الموافقة لأي رقم = ١

$$\frac{1}{6} = \text{احتمال ظهور الرقم (٥)}$$

$$\frac{1}{6} = \text{احتمال ظهور الرقم (٢)}$$

$$\text{احتمال ظهور الرقم (٧)} = \text{صفر لأنه مستحيل.}$$

مثال (٢): ألقيت قطعة نقود فضية على سطح أملس، أحسب:

١/ احتمال ظهور صورة.

٢/ احتمال ظهور كتابة.

٣/ مجموع الاحتمالين السابقين.

الحل

قطعة النقاد الفضية لها وجهان، أحدهما عليه صورة، والآخر عليه كتابة.

$$١- \text{احتمال ظهور صورة} = \frac{1}{2}$$

$$٢- \text{احتمال ظهور كتابة} = \frac{1}{2}$$

$$٣- \text{مجموع الاحتمالين} = ١$$

ويراعى أن الاحتمال عبارة عن حادث ولا يتوقف عند الحوادث البسيطة

كما في المثال السابق، ولكن يمكن أن يكون هناك أكثر من حادث، وقد يؤثر

كل منها في الحوادث الأخرى وقد لا يؤثر. ولذا فإن:

الحوادث المستقلة:

هي الحوادث التي إذا تحقق أي حادث منها فإنه لا يؤثر في الحوادث الأخرى ولا يمنعها. فإذا رمزنا لاحتمال بالرمز (ع) وكان لدينا حادثين أحدهما (ب) والآخر (ب) فإن احتمال تحقق الحادثين (ب ، ب) يتحدد كما يلي:

$$P(B) \times P(B) = P(B, B)$$

يلاحظ تطبيق قاعدة الضرب في الاحتمالات المستقلة.

مثال (٣): تمتلك إحدى الشركات مخزينين بكل منهما عدد من السلع الجيدة وعدد آخر من السلع التالفة (الردينة) موزعة كما يلي:

المخزن السلعة	الأول	الثاني
جيدة	٨٠	٤٥
ردينة	٢٠	٥
مجموع	١٠٠	٥٠

سحبت سلعة واحدة من كل مخزن بطريقة عشوائية، احسب:

- ١/ احتمال السلعتين من نوع جيد.
- ٢/ احتمال السلعتين من نوع رديء.
- ٣/ احتمال السلعة المسحوبة من المخزن الأول جيدة، والسلعة المسحوبة من الثاني رديئة.
- ٤/ احتمال السلعة المسحوبة من المخزن الأول رديئة والسلعة المسحوبة من المخزن الثاني جيدة.

الحل

المخزن	الأول	الثاني
سلعة جيدة	٨٠	٤٥
سلعة رديئة	٢٠	٥
المجموع	١٠٠	٥٠
	↓	↓
	(١)	(١)

$$١ / \text{احتمال السلعتين من نوع جيد} = \frac{٤٥}{٥٠} \times \frac{٨٠}{١٠٠} = ٠,٧٢$$

$$٢ / \text{احتمال السلعتين من نوع رديء} = \frac{٥}{٥٠} \times \frac{٢٠}{١٠٠} = ٠,٠٢$$

$$٣ / \text{احتمال الأولى جيدة والثانية رديئة} = \frac{٥}{٥٠} \times \frac{٨٠}{١٠٠} = ٠,٠٨$$

$$٤ / \text{احتمال الأولى رديئة والثانية جيدة} = \frac{٤٥}{٥٠} \times \frac{٢٠}{١٠٠} = ٠,١٨$$

ويمكن تعميم القاعدة السابقة مهما كان عدد الحوادث على أن تكون حوادث مستقلة لا يؤثر تحقق أحدها في تحقق الحوادث الأخرى.
فإذا كان لدينا أربعة حوادث أ ، ب ، ج ، د وكانت كلها من نوع الحوادث المستقلة، فإن:

$$P(A \text{ و } B \text{ و } C \text{ و } D) = P(A) \times P(B) \times P(C) \times P(D)$$

مثال (٤) : تمتلك إحدى الشركات ثلاثة مخازن بكل منها عدد من السلع موزعة كما يلي:

المخزن السلعة	الأول	الثاني	الثالث
ممتازة	٦٠	٩٠	٧٠
جيدة	٣٠	٤٠	٢٥
تالفة	١٠	٢٠	٥
مجموع	١٠٠	١٥٠	١٠٠

سحبت سلعة واحدة من كل مخزن بطريقة عشوائية، احسب:

١/ احتمال السلع الثلاثة ممتازة.

٢/ احتمال السلع الثلاثة جيدة.

٣/ احتمال السلع الثلاثة رديئة (تالفة).

٤/ احتمال الأولى جيدة والثانية ممتازة والثالثة تالفة.

٥/ احتمال الأولى ممتازة والثانية تالفة والثالثة جيدة.

الحل

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

$$1/ \text{احتمال الثلاثة ممتازة} = \frac{70}{100} \times \frac{90}{150} \times \frac{60}{100} = 0,252$$

$$2/ \text{احتمال الثلاثة جيدة} = \frac{25}{100} \times \frac{40}{150} \times \frac{30}{100} = 0,02$$

$$3/ \text{احتمال الثلاثة رديئة} = \frac{5}{100} \times \frac{20}{150} \times \frac{10}{100} = 0,00067$$

4/ احتمال الترتيب جيدة / ممتازة / تالفة

$$0,009 = \frac{5}{100} \times \frac{90}{150} \times \frac{30}{100} =$$

5/ احتمال الترتيب ممتازة / تالفة / جيدة

$$0,02 = \frac{25}{100} \times \frac{20}{150} \times \frac{60}{100} =$$

الحوادث غير المستقلة:

هي الحوادث التي إذا تحقق أي حادث منها فإنه يؤثر في تحقق الحوادث

الأخرى لكنه لا يمنعها. وتطبق قاعدة الضرب، حيث:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

وأيضاً:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

ويطلق على الحوادث غير المستقلة الاحتمال الشرطي بمعنى تحقق

حادث بشرط تحقق حادث آخر يسبقه ويؤثر في حدوثه.

مثال (٥): صندوق به ٨٠ تفاحة من نوع أحمر، ٢٠ تفاحة من نوع أخضر، سحب وحدتان في مرتين متتاليتين بشرط عدم رد الوحدة المسحوبة أولاً، قبل إجراء عملية السحب الثانية؛ المطلوب:

١/ احتمال الوحدتين من النوع الأحمر.

٢/ احتمال الوحدتين من النوع الأخضر.

٣/ احتمال الأولى حمراء.

٤/ احتمال الأولى خضراء.

الحل

$$P(A, B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$1/ \text{احتمال التفاحتين من لون أحمر} = \frac{80}{100} \times \frac{79}{99} = 0,6384$$

$$2/ \text{احتمال التفاحتين من لون أخضر} = \frac{20}{100} \times \frac{19}{99} = 0,0384$$

$$3/ \text{احتمال الأولى حمراء} = \frac{80}{100} \times \frac{20}{99} = 0,162$$

$$4/ \text{احتمال الأولى خضراء} = \frac{20}{100} \times \frac{80}{99} = 0,162$$

مثال (٦): صندوق به ٧٠ وحدة من سلعة ممتازة، ٢٠ وحدة من سلعة جيدة، ١٠ وحدات تالفة سحبت ٣ وحدات بطريقة عشوائية، وبفرض (عدم رد) الوحدة المسحوبة قبل عملية السحب التالية، احسب:

١/ احتمال أن تكون الوحدات الثلاثة ممتازة.

٢/ احتمال أن تكون الوحدات الثلاثة جيدة.

٣/ احتمال أن تكون الوحدات الثلاثة تالفة.

٤/ احتمال أن تكون الوحدتين الأولى والثانية ممتازة.

٥/ احتمال أن تكون الوحدة الأولى فقط ممتازة.

٦/ احتمال أن تكون السلع الثلاثة على الترتيب: ممتازة، جيدة، تالفة.

الحل

$$٠,٣٣٨٥٣ = ٠,٣٣٨٥٣ \times ٠,٣٣٨٥٣ \times ٠,٣٣٨٥٣ = ٠,٣٣٨٥٣^3$$

$$١/ \text{احتمال الثلاثة ممتازة} = \frac{٦٨}{٩٨} \times \frac{٦٩}{٩٩} \times \frac{٧٠}{١٠٠} = ٠,٣٣٨٥٣$$

$$٢/ \text{احتمال الثلاثة جيدة} = \frac{١٨}{٩٨} \times \frac{١٩}{٩٩} \times \frac{٢٠}{١٠٠} = ٠,٠٠٧١٠$$

$$٣/ \text{احتمال الثلاثة تالفة} = \frac{٨}{٩٨} \times \frac{٩}{٩٩} \times \frac{١٠}{١٠٠} = ٠,٠٠٠٧٤$$

٤/ احتمال الأولى والثانية ممتازة

$$٠,١٤٩٣٥ = \frac{٣٠}{٩٨} \times \frac{٦٩}{٩٩} \times \frac{٧٠}{١٠٠} =$$

$$٥/ \text{احتمال الأولى فقط ممتازة} = \frac{٢٩}{٩٨} \times \frac{٣٠}{٩٩} \times \frac{٧٠}{١٠٠} = ٠,٠٦٢٧٧$$

٦/ احتمال الثلاثة على الترتيب ممتازة، جيدة، تالفة

$$٠,٠١٤٤٣ = \frac{١٠}{٩٨} \times \frac{٢٠}{٩٩} \times \frac{٧٠}{١٠٠} =$$

الحوادث المانعة (المتعارضة / المتنافية / الطاردة):

هي الحوادث التي إذا تحقق أي حادث منها فإنه يمنع تحقق الحوادث الأخرى وتطبق قاعدة الجمع.

ويطلق على هذه الحالة من الاحتمالات (الاستحالة) بمعنى أنه يستحيل تحقق الحادثين معاً، وأن تحقق أحدهما يمنع تحقق الحادث الآخر.

وبفرض لدينا حادثين أ، ب فإن تحقق الحادث (أ) يمنع تحقق الحادث (ب) والعكس صحيح فإن تحقق الحادث (ب) يمنع تحقق الحادث (أ) وتكون صياغة القاعدة كما يلي: حيث تطبق قاعدة الجمع:

$$P(A, B) = P(A) + P(B)$$

فإذا كانت الأحداث أكثر من اثنين كأن تكون ثلاثة أو أربعة أو أكثر من ذلك تكون القاعدة:

$$P(A, B, C, \dots) = P(A) + P(B) + P(C) + \dots$$

مثال (٧): أنقيت زهرة طاولة مرة واحدة على سطح أملس، احسب الاحتمالات الآتية:

١/ احتمال ظهور رقم ٢ أو رقم ٥.

٢/ احتمال ظهور رقم ١ أو رقم ٤.

٣/ احتمال ظهور رقم فردي (١، ٣، ٥).

الحل

$$١/ \text{احتمال ظهور ٢ أو ٥} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$٢/ \text{احتمال ظهور ١ أو ٤} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$٣/ \text{احتمال ظهور رقم فردي (١، ٣، ٥)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

الحوادث المشتركة والمتعارضة:

يقال عن حادثين أنهما مشتركان، ومتعارضان في نفس الوقت إذا كان كل منهما يحمل أكثر من صفة، فيشترك الحادثان في صفة معينة ويتعارضان في صفة أخرى.

فإذا كان لدينا صندوق به ١٠ كرات حمراء و ١٥ كرة بيضاء ثم طبعنا خاتم بالحروف (ج م ع) على ٧ كرات حمراء، ٦ كرات بيضاء، ثم طبعنا خاتم آخر عليه شعار النسر ولنرمز له بالرمز صورة على باقي الكرات، فيمكن تقسيم الكرات كما يلي:

اللون / الطابع	ج م ع	ص	مجموع
أحمر	٧	٣	١٠
أبيض	٦	٩	١٥
مجموع	١٣	١٢	٢٥

يلاحظ أن الصندوق به ١٠ كرات تشترك في صفة واحدة وهي اللون الأحمر وتختلف أو تتعارض من حيث الطابع حيث توجد ٧ عليها الحروف ج م ع و ٣ عليها صورة.

كما توجد ١٥ كرة تشترك في اللون الأبيض وتتعارض من حيث الشعار أو الطابع.

ومن ناحية أخرى يمكن القول أن الصندوق به ١٣ كرة تشترك في الطابع (ج م ع) وتتعارض من ناحية اللون، كما توجد ١٢ كرة تشترك في الصورة تتعارض من ناحية اللون.

وبفرض سحب كرة واحدة من الصندوق فإن هذه الكرة ممكن أن تكون حمراء ومن الممكن أن تكون بيضاء، فإذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فإنه يمكن أن يكون عليها شعار (ج م ع)، ومن الممكن أن يكون عليها صورة.

ولذلك يقال عن هذه الحوادث أنها مشتركة ومتعارضة في نفس الوقت، وتعتبر هذه الحالة عن تحقق حادث على الأقل من حادثين أو أكثر وتكون صياغة القاعدة:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

وتوضيح تطبيق القاعدة كما يلي:

في حالة تحقق الحادث نضع علامة (✓) وفي حالة عدم تحققه نضع علامة (x)؛ وبفرض الحادثين أ ، ب:

ب	أ
x	✓
✓	x
✓	✓
x	x

احتمال تحقق أ وعدم تحقق ب
احتمال تحقق ب وعدم تحقق أ
احتمال تحقق الحادثين أ ، ب
احتمال عدم تحقق الحادثين

$$1 = \text{مجموع الاحتمالات}$$

مثال (٨): إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الرياضة = ٠,٨ واحتمال نجاحه في مقرر اللغات = ٠,٦ احسب احتمال نجاح الطالب في مقرر واحد على الأقل.

الحل

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال نجاح الطالب في مقرر على الأقل = احتمال نجاحه في الرياضة
+ احتمال نجاحه في اللغات
- حاصل ضرب الاحتمالين

$$0,92 = 0,6 + 0,8 - 0,6 \times 0,8$$

حل آخر:

احتمال نجاح الطالب في مقرر على الأقل

= احتمال نجاحه في الرياضة ورسوبه في اللغة

+ احتمال نجاحه في اللغة ورسوبه في الرياضة

+ احتمال نجاحه في المادتين

$$0,92 = 0,6 \times 0,8 + 0,6 \times 0,2 + 0,4 \times 0,8 =$$

حل ثالث:

يجب أن نتذكر أن مجموع الاحتمالات الممكنة لتحقيق عدة حوادث

يساوي الواحد الصحيح. ولذلك فإن احتمال تحقق الحادث مضافاً إليه

احتمال عدم تحققه = الواحد الصحيح.

∴ الاحتمال المطلوب + الاحتمال العكسي = 1

ومنها نجد أن:

الاحتمال المطلوب = 1 - الاحتمال العكسي

احتمال نجاح الطالب في الرياضة = 0,8

احتمال رسوبه في الرياضة = 0,2

احتمال نجاحه في اللغة = 0,6

احتمال رسوبه في اللغة = 0,4

احتمال نجاحه في مادة على الأقل = 1 - الاحتمال العكسي

= 1 - احتمال رسوبه في المادتين

$$0,92 = 1 - 0,4 \times 0,2 =$$

مثال (٩): تمتلك إحدى الشركات مخزينين، الأول به ٣٠ وحدة ممتازة، ٢٠ وحدة جيدة، والثاني به ٩٠ وحدة ممتازة، ١٠ وحدات جيدة؛ سحبت سلعة واحدة من كل مخزن بطريقة عشوائية. احسب:

- ١/ احتمال واحدة على الأقل ممتازة.
- ٢/ احتمال واحدة على الأقل جيدة.
- ٣/ احتمال الوحدتين ممتازة.
- ٤/ احتمال الوحدتين جيدة.
- ٥/ احتمال الأولى ممتازة.
- ٦/ احتمال الثانية ممتازة

الحل

(٢)
٩٠
١٠
١٠٠

↓

(١)

(١)
٣٠
٢٠
٥٠

↓

(١)

ممتازة
جيدة
المجموع

١/ احتمال واحدة على الأقل ممتازة = $P + P$

$$= P + P - P$$

$$= \frac{90}{100} \times \frac{30}{50} - \frac{90}{100} + \frac{30}{50} =$$

$$= 0,96 = 0,9 \times 0,6 - 0,9 + 0,6 =$$

حل آخر:

$$\text{الاحتمال} = \frac{90}{100} \times \frac{30}{50} + \frac{90}{100} \times \frac{20}{50} + \frac{10}{100} \times \frac{30}{50} =$$

$$= 0,96 = 0,9 \times 0,6 + 0,9 \times 0,4 + 0,1 \times 0,6 =$$

الاحتمال المطلوب = ١ - الاحتمال العكسي

$$= 1 - \frac{10}{100} \times \frac{20}{50} = 1 - 0,04 = 0,96$$

٦٤

$$٢ / \text{احتمال واحدة على الأقل جيدة} = ١ - \frac{٩٠}{١٠٠} \times \frac{٣٠}{٥٠} = ٠,٤٦$$

$$٣ / \text{احتمال الوجدتين ممتازة} = \frac{٩٠}{١٠٠} \times \frac{٣٠}{٥٠} = ٠,٥٤$$

$$٤ / \text{احتمال الوجدتين جيدة} = \frac{١٠}{١٠٠} \times \frac{٢٠}{٥٠} = ٠,٠٤$$

$$٥ / \text{احتمال الأولى ممتازة} = \frac{١٠}{١٠٠} \times \frac{٣٠}{٥٠} = ٠,٠٦$$

$$٦ / \text{احتمال الثانية ممتازة} = \frac{٩٠}{١٠٠} \times \frac{٢٠}{٥٠} = ٠,٣٦$$

توزيع ثنائي الحدين:

يعتمد توزيع ثنائي الحدين على عدد الحالات الموافقة لتحقيق حادث معين وعدد الحالات الكلية لتحقيق الحادث ويعتمد ثنائي الحدين على مفكوك نظرية ذات الحدين للمقدار $(p + q)^n$ مرفوعاً للقوة (n) ، حيث:

$$(p + q)^n = {}^n C_0 p^0 q^n + {}^n C_1 p^1 q^{n-1} + {}^n C_2 p^2 q^{n-2} + \dots + {}^n C_{n-1} p^{n-1} q^1 + {}^n C_n p^n q^0$$

مثال (١٠): ألقيت ٤ زهرات طاولة مرة واحدة على سطح أملس. احسب الاحتمالات الآتية:

- ١/ احتمال ظهور رقم ٦ على زهرتين فقط.
- ٢/ احتمال ظهور رقم ٦ على زهرتين على الأقل.
- ٣/ احتمال ظهور رقم ٦ على أكثر من زهرتين.
- ٤/ احتمال ظهور رقم ٦ على أقل من زهرتين.
- ٥/ احتمال ظهور رقم ٦ على زهرتين على الأكثر.
- ٦/ احتمال عدم ظهور رقم ٦ على أي زهرة.
- ٧/ احتمال ظهور رقم ٦ على زهرة واحدة على الأقل.
- ٨/ احتمال ظهور رقم ٦ على ٣ زهرات.
- ٩/ احتمال ظهور رقم ٦ على ٣ زهرات على الأقل.
- ١٠/ احتمال ظهور رقم ٦ على ٣ زهرات على الأكثر.

الحل

$$س = ٠, ١, ٢, ٣, ٤$$

$$ع = ٤$$

$$د(٠) = ع = (س = ٠ / ع = ٤) = ٠,٤٨٢٣ = \left(\frac{١}{٦}\right)^٤ \left(\frac{٥}{٦}\right)^٠$$

$$د(١) = ع = (س = ١ / ع = ٤) = ٠,٣٨٥٨ = \left(\frac{١}{٦}\right)^١ \left(\frac{٥}{٦}\right)^٣$$

$$د(٢) = ع = (س = ٢ / ع = ٤) = ٠,١١٥٧ = \left(\frac{١}{٦}\right)^٢ \left(\frac{٥}{٦}\right)^٢$$

$$د(٣) = ع = (س = ٣ / ع = ٤) = ٠,٠١٥٤ = \left(\frac{١}{٦}\right)^٣ \left(\frac{٥}{٦}\right)^١$$

$$د(٤) = ع = (س = ٤ / ع = ٤) = ٠,٠٠٠٨ = \left(\frac{١}{٦}\right)^٤ \left(\frac{٥}{٦}\right)^٠$$

$$\underline{١,٠٠٠٠}$$

ملاحظة: يجب مراجعة النتائج واستخدام التقريب بحيث يكون مجموع الاحتمالات الممكنة = الواحد الصحيح ويمكن الاستفادة من توزيع ثنائي الحدين في حل جميع المطلوب كما يلي:

$$١ / \text{احتمال ظهور رقم (٦) على زهرتين فقط} = د (٢) = ٠,١١٥٧$$

$$٢ / \text{احتمال ظهور رقم (٦) على زهرتين على الأقل}$$

$$= د (٢) + د (٣) + د (٤)$$

$$= ٠,١١٥٧ + ٠,٠١٥٤ + ٠,٠٠٠٨ = ٠,١٣١٩$$

$$٣ / \text{احتمال ظهور رقم (٦) على أكثر من زهرتين} = د (٣) + د (٤)$$

$$= ٠,٠١٥٤ + ٠,٠٠٠٨ = ٠,٠١٦٢$$

$$٤ / \text{احتمال ظهور رقم (٦) على أقل من زهرتين} = د (١) + د (٠)$$

$$= ٠,٣٨٥٨ + ٠,٤٨٢٣ = ٠,٨٦٨١$$

$$٥ / \text{احتمال ظهور رقم (٦) على زهرتين على الأكثر}$$

$$= د (٢) + د (١) + د (٠)$$

$$= ٠,١١٥٧ + ٠,٣٨٥٨ + ٠,٤٨٢٣ = ٠,٩٨٣٨$$

$$٦ / \text{احتمال عدم ظهور رقم (٦) على أي زهرة} = د (٠) = ٠,٤٨٢٣$$

$$٧ / \text{احتمال ظهور رقم (٦) على زهرة واحدة على الأقل}$$

$$= د (١) + د (٢) + د (٣) + د (٤)$$

$$\text{أو } ١ - د (٠) = ١ - ٠,٤٨٢٣ = ٠,٥١٧٧$$

$$٨ / \text{احتمال ظهور رقم (٦) على ٣ زهرات} = د (٣) = ٠,٠١٥٤$$

$$٩ / \text{احتمال ظهور رقم (٦) على ٣ زهرات على الأقل} = د (٣) + د (٤)$$

$$= ٠,٠١٥٤ + ٠,٠٠٠٨ = ٠,٠١٦٢$$

١٠ / احتمال ظهور رقم (٦) على ٣ زهرات على الأكثر

$$د(٣) + د(٢) + د(١) + د(٠) =$$

$$أو ١ - د(٤) =$$

$$٠,٩٩٩٢ = ٠,٠٠٠٨ - ١ =$$

مثال (١١): قامت شركة الاتحاد العربي لصناعة الأجهزة الكهربائية بدراسة إحصائية لمنتجاتها، وقد تبين من الدراسة أن كل ١٠٠٠ قطعة منتجة يوجد من بينها ٨٥٠ قطعة سليمة تصلح للاستخدام، فإذا سحبت عينة مكونة من ٥ قطع. احسب توزيع ثنائي الحدين لهذه العينة.

الحل

$$احتمال إنتاج قطعة جيدة = \frac{٨٥٠}{١٠٠٠} = ٠,٨٥$$

$$احتمال إنتاج قطعة تالفة = ١ - ٠,٨٥ = ٠,١٥$$

$$س = ٠, ١, ٢, ٣, ٤, ٥$$

حيث: $٥ = ن$

$$د(٠) = ح(س = ٠ / ٥ = ن) = ٠,٠٠٠١ = (٠,١٥)^٠ (٠,٨٥)^٥$$

$$د(١) = ح(س = ١ / ٥ = ن) = ٠,٠٠٢٢ = (٠,١٥)^١ (٠,٨٥)^٤$$

$$د(٢) = ح(س = ٢ / ٥ = ن) = ٠,٠٢٤٤ = (٠,١٥)^٢ (٠,٨٥)^٣$$

$$د(٣) = ح(س = ٣ / ٥ = ن) = ٠,١٣٨١ = (٠,١٥)^٣ (٠,٨٥)^٢$$

$$د(٤) = ح(س = ٤ / ٥ = ن) = ٠,٣٩١٥ = (٠,١٥)^٤ (٠,٨٥)^١$$

$$د(٥) = ح(س = ٥ / ٥ = ن) = ٠,٤٤٣٧ = (٠,١٥)^٥ (٠,٨٥)^٠$$

$$١,٠٠٠٠$$

مثال (١٢) : من توزيع ثنائي الحدين في المثال السابق. أجب عن الأسئلة الآتية:

١/ احتمال قطعتين على الأقل جيدة.

٢/ احتمال أكثر من قطعتين جيدة.

٣/ احتمال أقل من ٣ قطع جيدة.

٤/ احتمال ٣ قطع على الأكثر جيدة.

٥/ احتمال قطعة واحدة على الأقل جيدة.

الحل

١/ احتمال قطعتين على الأقل جيدة

$$D(2) + D(3) + D(4) + D(5)$$

$$= 1 - [D(0) + D(1)] \text{ أو}$$

$$= 1 - [0.0001 + 0.0022] = 0.9977$$

٢/ احتمال أكثر من قطعتين جيدة

$$D(3) + D(4) + D(5)$$

$$= 0.1381 + 0.3915 + 0.4437 = 0.9733$$

٣/ احتمال أقل من ٣ قطع جيدة

$$D(0) + D(1) + D(2)$$

$$= 0.0001 + 0.0022 + 0.0244 = 0.0267$$

٤/ احتمال ٣ قطع على الأكثر جيدة

$$D(3) + D(4) + D(5) + D(0)$$

$$= 1 - [D(0) + D(1)] \text{ أو}$$

$$= 1 - [0.0001 + 0.0022] = 0.9977$$

٥/ احتمال قطعة واحدة على الأقل جيدة

$$= 1 - D(0) = 1 - 0.0001 = 0.9999$$

تطبيقات على الاحتمالات

١ / قامت إدارة إحدى الشركات بدراسة الإنتاج وتبين أن كل ٥٠٠ وحدة منتجة يوجد من بينها ٤٠٠ وحدة (صالحة للاستخدام)، فإذا سحبت عينة مكونة من ٥ وحدات من إنتاج الشركة، احسب:

- (١) توزيع ثنائي الحدين للعينة المسحوبة.
- (٢) احتمال أن يكون بالعينة وحدتين على الأقل جيدة.
- (٣) احتمال أن يكون أقل من وحدتين جيدة.
- (٤) احتمال أن يكون أكثر من وحدتين جيدة.
- (٥) احتمال أن يكون ٣ وحدات فقط جيدة.
- (٦) احتمال أكثر من ٣ وحدات جيدة.
- (٧) احتمال ٣ وحدات على الأقل جيدة.
- (٨) احتمال ٣ وحدات على الأكثر جيدة.
- (٩) احتمال أقل من ٣ وحدات جيدة.
- (١٠) احتمال ٤ وحدات على الأكثر جيدة.

٢ / تبين من دراسة الإنتاج في شركة النصر للمعدات أن ٧٠% من الإنتاج مطابق للمواصفات، فإذا سحبت عينة مكونة من أربعة أجزاء من إنتاج الشركة، احسب:

- (١) توزيع ثنائي الحدين للعينة المسحوبة.
- (٢) احتمال أن تكون أكثر من وحدة جيدة.
- (٣) احتمال وحدتين على الأكثر جيدة.
- (٤) احتمال أقل من ٣ وحدات جيدة.
- (٥) احتمال ٣ وحدات على الأقل جيدة.
- (٦) احتمال أكثر من وحدتين جيدة.
- (٧) احتمال أن تكون العينة كلها تالفة.
- (٨) احتمال أن تكون وحدة واحدة على الأقل جيدة.
- (٩) احتمال أن تكون وحدتين على الأقل جيدة.
- (١٠) احتمال أن يكون أقل من ٣ وحدات جيدة.

٣/ تبين من دراسة نتائج الدورات التدريبية للعاملين بإحدى الشركات أن كل ٥٠ عاملاً يؤدون الدورة ينجح منهم ٣٥ عاملاً، فإذا سحبت ٥ بطاقات من بطاقات العاملين بالشركة بطريقة عشوائية لمن أدوا الدورة التدريبية، احسب:

- (١) احتمال نجاح ٣ على الأقل من العينة.
- (٢) احتمال نجاح ٣ على الأكثر من العينة.
- (٣) احتمال نجاح أكثر من ٣ من العينة.
- (٤) احتمال نجاح أقل من ٣ من العينة.
- (٥) احتمال نجاح العينة بالكامل.
- (٦) احتمال نجاح واحد على الأقل.
- (٧) احتمال نجاح ٢ على الأقل.
- (٨) احتمال نجاح أكثر من ٢.
- (٩) احتمال نجاح أقل من ٢.
- (١٠) احسب توزيع ثنائي الحدين للعينة.

نماذج امتحانات النموذج الأول

السؤال الأول:

في المتوالية العددية:

..... ، ، ٢٣ ، ١٩ ، ١٥ ، ١١ ، ٧

١ / الحد الثامن هو:

(أ) ٥٥ (ب) ٣٥ (ج) ٣٣ (د) ٥٣

٢ / الحد العاشر هو:

(أ) ٣٣ (ب) ٤٤ (ج) ٣٤ (د) ٤٣

٣ / مجموع الحدين الثالث والسادس هو:

(أ) ٤٢ (ب) ٤٤ (ج) ٢٢ (د) ٢٤

٤ / مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

(أ) ٥٠٢ (ب) ٢٠٥ (ج) ٢٥٠ (د) ٥٢٠

٥ / الحد الخامس عشر هو:

(أ) ٦٣ (ب) ٣٦ (ج) ٦٦ (د) ٣٣

٦ / الحد الثامن عشر هو:

(أ) ٧٧ (ب) ٧٥ (ج) ٥٥ (د) ٥٧

السؤال الثاني:

لحل المعادلات الآتية باستخدام المحددات:

$$٥ \text{ س} + ٢ \text{ ص} = ١٣١$$

$$٧ \text{ س} + \text{ص} = ١٤٢$$

١ / Δ س (محدد بسط س) هو:

(أ) ٥١٣ (ب) ٣١٥ (ج) ١٥٣ - (د) ١٣٥

٢ / Δ ص (محدد بسط ص) هو:

(أ) ٧٠٢ (ب) ٢٧٠ (ج) ٧٢٠ (د) ٢٠٧

٣ / المحدد العام (محدد معاملات المتغيرات) هو:

(أ) ٩ - (ب) ١٩ (ج) ٩١ - (د) ١٣

السؤال الثالث :

تمتلك إحدى الشركات ثلاثة مخازن بكل منها عدد من السلع موزعة كما يلي:

المخزن السلعة	الأول	الثاني	الثالث	مجموع
ممتازة	١٨	٣٢	٣٥	٨٥
جيدة	١٧	٢٨	٤٥	٩٠
تالفة	١٥	٤٠	٢٠	٧٥
مجموع	٥٠	١٠٠	١٠٠	٢٥٠

سحبت عينة واحدة من كل مخزن بطريقة عشوائية:

١/ احتمال أن تكون السلع الثلاثة ممتازة هو:

- (أ) ٠,٣٠٠٤ (ب) ٠,٠٠٣٤ (ج) ٠,٠٤٠٣ (د) ٠,٤٣٠٠

٢/ احتمال أن تكون السلع الثلاثة تالفة هو:

- (أ) ٠,٠٢٤٠ (ب) ٠,٠٠٢٤٠ (ج) ٠,٤٢٠٠ (د) ٠,٢٤٠٠

٣/ احتمال الأولى فقط ممتازة هو:

- (أ) ٠,١٩١٥ (ب) ٠,٥٩١١ (ج) ٠,١١٩٥ (د) ٠,١٥٩١

٤/ احتمال الأولى والثانية ممتازة هو:

- (أ) ٠,٠٧٤٩ (ب) ٠,٧٠٤٩ (ج) ٠,٩٠٤٧ (د) ٠,٧٤٩٠

٥/ احتمال الثانية والثالثة جيدة هو:

- (أ) ٠,٠٨٣٢ (ب) ٠,٢٣٠٨ (ج) ٠,٢٠٣٨ (د) ٠,٢٣٨٠

٦/ احتمال الثلاثة المسحوبة جيدة هو:

- (أ) ٠,٨٠٤٢ (ب) ٠,٢٤٠٨ (ج) ٠,٠٤٢٨ (د) ٠,٤٢٨٠

٧/ احتمال واحدة على الأقل ممتازة هو:

- (أ) ٠,٧١٧١ (ب) ٠,١٧١٧ (ج) ٠,٧٧١١ (د) ٠,١١٧٧

٨/ احتمال أكثر من واحدة جيدة هو:

- (أ) ٠,٨٨٥٢ (ب) ٠,٢٨٨٥ (ج) ٠,٥٨٢٨ (د) ٠,٨٥٢٨

٩/ احتمال واحدة على الأقل جيدة هو:

- (أ) ٠,٢٢٨٧ (ب) ٠,٧٢٢٨ (ج) ٠,٨٧٢٢ (د) ٠,٢٧٢٨

١٠/ احتمال وحدتين على الأقل جيدة هو:

- (أ) ٠,٢٦٨٧ (ب) ٠,٨٧٦٢ (ج) ٠,٦٧٨٢ (د) ٠,٢٧٨٦

السؤال الرابع:

متوالية هندسية:

..... ، ، ١٤٤ ، ٧٢ ، ٣٦ ، ١٨ ، ٩

١/ الحد الثامن هو:

أ) ١١٥٢ (ب) ٢٥١١ (ج) ١٢٥١ (د) ١٥١٢

٢/ الحد العاشر هو:

أ) ٦٠٨٤ (ب) ٤٨٦٠ (ج) ٤٦٠٨ (د) ٨٦٠٤

٣/ مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

أ) ٧٢٠٩ (ب) ٩٢٠٧ (ج) ٧٢٩٠ (د) ٩٠٢٧

السؤال الخامس:

في مفكوك المقدار:

$(س + ٤)^٥$

١/ الحد الرابع هو:

أ) ٤٦٠ (ب) ٦٠٤ (ج) ٦٤٠ س^٢ (د) ٤٠٦

٢/ معامل س^٣ هو:

أ) ١٠٦ (ب) ١٦٠ (ج) ٦٠١ (د) ٦١٠

٣/ معامل س هو:

أ) ١٠٨٢ (ب) ٨٠١٢ (ج) ٢٠١٨ (د) ١٢٨٠

٤/ قيمة الحد الخالي من س هو:

أ) ١٠٢٤ (ب) ٤٢٠١ (ج) ٢٤١٠ (د) ٤٠١٢

النموذج الثاني

السؤال الأول:

متوالية هندسية:

..... ، ، ٥١٢ ، ١٢٨ ، ٣٢ ، ٨

١/ الحد التاسع هو:

(أ) ٥٣٤٢٨٨ (ب) ٢٢٤٥٨٨ (ج) ٨٨٢٥٤٢ (د) ٨٨٢٢٥٤

٢/ مجموع الحدود الستة الأولى هو:

(أ) ٩٣١٠٠ (ب) ١٢٩٠٠ (ج) ١٠٠٩٢ (د) ١٠٩٣٠

٣/ الحد الخامس هو:

(أ) ٨٤٠٢ (ب) ٢٠٤٨ (ج) ٢٤٨٠ (د) ٤٠٨٢

السؤال الثاني:

متوالية عددية:

..... ، ، ٤٢ ، ٣٦ ، ٣٠ ، ٢٤ ، ١٨

١/ الحد العاشر هو:

(أ) ٧٢ (ب) ٢٢ (ج) ٢٧ (د) ٧٧

٢/ مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

(أ) ٤٠٥ (ب) ٥٤٠ (ج) ٤٥٠ (د) ٥٠٤

٣/ الفرق بين الحدين الثاني عشر والثامن هو:

(أ) ٢٤ (ب) ٤٤ (ج) ٢٢ (د) ٤٢

السؤال الثالث:

تمتلك إحدى الشركات مخزناً به مجموعة سلع موزعة كما يلي: ٤٥ وحدة ممتازة، ٣٥ وحدة جيدة، ٢٠ وحدة تالفة. سحبت وحدتان بطريقة عشوائية:

أولاً: بفرض رد السلعة المسحوبة في كل مرة قبل عملية السحب التالية فإن:

١/ احتمال الوجدتين من نوع ممتاز هو:

(أ) ٠,٢٢٠٥ (ب) ٠,٥٠٢٢ (ج) ٠,٢٠٢٥ (د) ٠,٥٢٠٢

٢/ احتمال الوجدتين من نوع جيد هو:

(أ) ٠,١٢٢٥ (ب) ٠,٥٢٢١ (ج) ٠,٥١٢٢ (د) ٠,٢١٥٢

٣ / احتمال الوجدتين من نوع تالف هو:

(أ) ٠,٠٦ (ب) ٠,٠٧ (ج) ٠,٤٦ (د) ٠,٠٤

٤ / احتمال الأولى ممتازة هو:

(أ) ٠,٥٤٧٢ (ب) ٠,٢٤٧٥ (ج) ٠,٧٥٤٢ (د) ٠,٤٥٧٢

٥ / احتمال واحدة على الأقل ممتازة هو:

(أ) ٠,٩٧٦٥ (ب) ٠,٥٦٧٩ (ج) ٠,٦٩٧٥ (د) ٠,٥٩٦٧

ثانياً: بفرض عدم رد الوحدة المسحوبة قبل عملية السحب التالية:

٦ / احتمال الوجدتين من نوع ممتازة هو:

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٣ (ج) ٠,٦١٢ (د) ٠,٢٥

٧ / احتمال الوجدتين من نوع جيد هو:

(أ) ٠,٢١٠٢ (ب) ٠,٢٢١٠ (ج) ٠,١٢٠٢ (د) ٠,٢٠١٢

٨ / احتمال الأولى جيدة هو:

(أ) ٠,٩٨٢٢ (ب) ٠,٩٢٨٢ (ج) ٠,٨٢٩٢ (د) ٠,٢٢٩٨

٩ / احتمال واحدة فقط ممتازة هو:

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٦ (ج) ٠,٧ (د) ٠,٣

١٠ / احتمال واحدة على الأقل ممتازة هو:

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٧ (ج) ٠,٢ (د) ٠,١

السؤال الرابع: توافرت لديك المعادلات الآتية:

$$٥ \text{ س} + ٧ \text{ ص} = ٢٥١$$

$$٦ \text{ س} - ٢ \text{ ص} = ٦٢$$

١ / قيمة المحدد العام (محدد معاملات المتغيرات) هي:

(أ) ٢٥ (ب) ٢٢ (ج) ٥٥ (د) ٥٢ -

٢ / قيمة المحدد بسط س هي:

(أ) ٣٦٩ (ب) ٦٩٣ (ج) ٩٣٦ - (د) ٦٣٩

٣ / قيمة المتغير س هي:

(أ) ١٨ (ب) ٨٨ (ج) ١١ (د) ٨١ -

٤ / قيمة المحدد بسط ص هي:

(أ) ١٩١٦ (ب) ١١٩٦ - (ج) ٦٩١١ (د) ٦٩١

٥ / قيمة المتغير ص هي:

(أ) ٣٣ - (ب) ٢٢ (ج) ٢٣ (د) ٣٢

السؤال الخامس:

في مفكوك المقدار: $(س + ٧)^٥$ نجد أن:

١/ معامل $س^٣$ هو:

- (أ) ٤٩٠ (ب) ٩٠٤ (ج) ٩٤٠ (د) ٤٠٩

٢/ قيمة الحد الخالي من $س$ هو:

- (أ) ٧٨٦١٠ (ب) ٧١٠٨٦ (ج) ١٦٨٠٧ (د) ٦٧٨٠١

٣/ قيمة الحد الرابع هي:

- (أ) $٣٣٠٤ س^٣$ (ب) $٤٣٠٣ س$ (ج) $٣٠٣٤ س^٤$ (د) $٣٤٣٠ س^٢$

٤/ قيمة الحد الثالث هي:

- (أ) $٩٤٠ س^٢$ (ب) $٤٩٠ س^٣$ (ج) $٤٩٠ س$ (د) $٩٠٤ س^٢$

السؤال السادس:

أسندت إليك إدارة الكلية اختيار أربعة طلاب من بين العشرة الأوائل، عدد طرق

الاختيار هي:

- (أ) ١٠٢ (ب) ٢١٠ (ج) ٢٠١ (د) ١٢٠

السؤال السابع:

عدد طرق ترتيب خمسة أشخاص في ثلاثة أماكن هي:

- (أ) ٦٠ (ب) ٦٥ (ج) ٦٧ (د) ١٩

السؤال الثامن:

توافرت لديك المعادلات الآتية:

(١) $٧ س + ٥ ص = ٢٢١$

(٢) $١١ س - ٢ ص = ٢٢٩$

١/ قيمة محدد مصفوفة المعاملات هي:

- (أ) ٩٦ (ب) ٩٩ (ج) ٦٩ - (د) ٦٦

النموذج الثالث

السؤال الأول:

تمتلك إحدى الشركات مخزينين بكل منهما عدد من السلع موزعة كما يلي:

المخزن السلعة	الأول	الثاني
ممتازة	٤٥	٥٠
جيدة	٣٥	٣٨
تالفة	٢٠	١٢
مجموع	١٠٠	١٠٠

سحبت سلعة واحدة من كل مخزن بطريقة عشوائية:

١/ احتمال السلعتين من نوع ممتاز هو:

(أ) ٠,٥٢٢ (ب) ٠,١٤٢ (ج) ٠,١٢٣ (د) ٠,٢٢٥

٢/ احتمال السلعتين من نوع جيد هو:

(أ) ٠,٣١٣ (ب) ٠,١٣٣٠ (ج) ٠,٣٣١ (د) ٠,٤٣٣

٣/ احتمال السلعتين من نوع تالف هو:

(أ) ٠,٠٢٤ (ب) ٠,٢٤٠ (ج) ٠,٢٠٤ (د) ٠,٤٠٢

٤/ احتمال الأولى ممتازة هو:

(أ) ٠,٥٢٢ (ب) ٠,٢٢٥ (ج) ٠,٥٢٥ (د) ٠,٥٦٧

٥/ احتمال واحدة على الأقل ممتازة هو:

(أ) ٠,٢٧٥ (ب) ٠,٥٧٢ (ج) ٠,٥٢٧ (د) ٠,٧٢٥

٦/ احتمال واحدة على الأقل جيدة هو:

(أ) ٠,٥٩٧ (ب) ٠,٩٧٥ (ج) ٠,٧٩٥ (د) ٠,٩٩٧

٧/ احتمال واحدة على الأقل تالفة هو:

(أ) ٠,٦٢٩ (ب) ٠,٩٢٦ (ج) ٠,٢٩٦ (د) ٠,٩٦٢

السؤال الثاني:

متوالية عددية:

١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢٤ ، ٢٧ ، ،

١/ الحد العاشر هو:

(أ) ٣٩ (ب) ٩٣ (ج) ٩٩ (د) ٣٣

٢ / مجموع الحدين الثاني عشر والخامس عشر هو:

(أ) ٥٨ (ب) ٦٧ (ج) ٩٩ (د) ٧٩

٣ / مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

(أ) ٢٥٥ (ب) ٥٥٢ (ج) ٥٢٥ (د) ٣٢٢

٤ / الحد الخامس عشر هو:

(أ) ٥٥ (ب) ٤٥ (ج) ٥٤ (د) ٤٤

السؤال الثالث: توافرت لديك المعادلات الآتية:

(١) $٧ \text{ س} + ١١ \text{ ص} = ٣١٩$

(٢) $١٣ \text{ س} + ٩ \text{ ص} = ٤٢١$

١ / المحدد العام هو:

(أ) ٧٥ (ب) - ٨٠ (ج) ٧٣ (د) ٨٧

٢ / محدد بسط س هو:

(أ) - ١٠٦٧ (ب) ٧٠١٦ (ج) ٦٠٧١ (د) - ١٧٦٠

٣ / محدد بسط ص هو:

(أ) - ١٢٠٠ (ب) ١٠٠٢ (ج) ٢٠٠١ (د) ٢١٠٠

٤ / قيمة ص هي:

(أ) ٥١ (ب) ١٥ (ج) ١١ (د) ٥٥

السؤال الرابع:

متوالية هندسية:

٨ ، ٢٤ ، ٧٢ ، ٢١٦ ، ٦٤٨ ، ، ،

١ / الحد الثامن هو:

(أ) ٤٦٧٩١ (ب) ٩٧٦٤١ (ج) ١٧٤٩٦ (د) ٦٤٧١٩

٢ / مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

(أ) ٢٣٦١٩٢ (ب) ٣٢٢٦١٩ (ج) ١٢٢٣٦٩ (د) ٩٦٣٢٢١

٣ / الحد الثاني عشر هو:

(أ) ٧٧١١٤٦ (ب) ٤٦٧٧١١ (ج) ١١١٧٧٦٤ (د) ١٤١٧١٧٦

السؤال الخامس:

متوالية عددية مجموع الحدين الرابع والثامن = ٧٢، والفرق بين الحدين التاسع

والخامس = ١٦، فإن:

١/ مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

(أ) ٣٤٠ (ب) ٣٠٤ (ج) ٤٠٣ (د) ٤٣٠

٢/ مجموع الحدين الثاني عشر والتاسع عشر هو:

(أ) ٤٨١ (ب) ٤١٨ (ج) ١٤٨ (د) ٨٤١

٣/ الحد السابع عشر هو:

(أ) ٨٠ (ب) ٨٥ (ج) ٥٨ (د) ٧٥

السؤال السادس:

في مفكوك المقدار: (س - ٧)^٥ نجد أن:

١/ قيمة الحد الخالي من س هي:

(أ) -١٦٨٠٧ (ب) ٦٧٨٠١ (ج) ١٠٦٧٨ (د) ٨٧٦٠١

٢/ قيمة الحد الرابع هي:

(أ) ٣٠٣٤ س^٢ (ب) ٤٠٣٣ س^٢ (ج) -٣٤٣٠ س^٢ (د) ٣٣٤٠ س

٣/ معامل س^٣ هو:

(أ) ٤٩٠ (ب) ٩٠٤ (ج) ٤٠٩ (د) ٩٤٠

٤/ معامل س^٤ هو:

(أ) ٥٣ (ب) -٣٥ (ج) ٥٥ (د) ٣٣

السؤال السابع:

توافرت لديك المعادلات الآتية:

(١) ٩٣ = ٤ ع + ٣ ص + ٢ س

(٢) ١٢٨ = ٣ ع + ٤ ص + ٥ س

(٣) ٧٨ = ٤ ع + ٥ ص + ٦ س

١/ قيمة محدد مصفوفة المعاملات هو:

(أ) ٥٣ (ب) -٣٥ (ج) ٣٣ (د) ٥٥

السؤال الثامن:

إدارة بها ١٥ موظف، عدد طرق اختيار ثلاثة من بينهم هي:

(أ) ٤٤٥ (ب) ٥٥٤ (ج) ٤٥٥ (د) ٤٥٤

النموذج الرابع

السؤال الأول:

متوالية عددية مجموع حديها التاسع والسادس = ٧٨ والفرق بينهما = ١٢

١/ الحد التاسع هو:

(أ) ٥٥ (ب) ٤٤ (ج) ٥٤ (د) ٤٥

٢/ الحد السادس هو:

(أ) ٣٣ (ب) ١١ (ج) ٢٢ (د) ٣٥

٣/ مجموع الحدود الستة الأولى هو:

(أ) ١٨٣ (ب) ١٣٨ (ج) ٨١٣ (د) ٨٣١

٤/ مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

(أ) ١٠٣ (ب) ٣٠١ (ج) ٣١٠ (د) ١٣٠

٥/ الحد الثاني عشر هو:

(أ) ٥٧ (ب) ٥٥ (ج) ٧٥ (د) ٧٧

السؤال الثاني:

متوالية هندسية:

٥ ، ١٥ ، ٤٥ ، ١٣٥ ، ٤٠٥ ، ، ،

٦/ الحد التاسع هو:

(أ) ٣٣٨٠٥ (ب) ٢٣٠٨٥ (ج) ٥٢٣٠٨ (د) ٨٥٠٣٣

٧/ مجموع الحدود العشرة الأولى هو:

(أ) ١٢٤٠٦٧ (ب) ٧٦٤٢٠١ (ج) ١٤٧٦٣٠ (د) ٤٢٧٦٠١

السؤال الثالث:

في مفكوك المقدار: (س - ٤)^٦ نجد أن:

٨/ قيمة الحد الخالي من س هو:

(أ) ٦٩٤٠ (ب) ٩٠٦٤ (ج) ٦٠٤٩ (د) ٤٠٩٦

٩/ الحد الخامس هو:

(أ) ٣٨٤٠ س^٢ (ب) ٨٤٠٣ س^٢ (ج) ٤٣٠٨ س^٢ (د) ٨٠٤٣ س^٢

١٠ / معامل س ٣ هو:	(أ) ٢١٠٨	(ب) ١٢٨٠ -	(ج) ٨١٢٠	(د) ١٠٢٨
١١ / معامل س ٢ هو:	(أ) ٤٣٠٨	(ب) ٣٨٤٠	(ج) ٣٠٨٤	(د) ٤٨٣٠

السؤال الرابع:

إذا كان احتمال نجاح طالب في الرياضة ٠,٧ واحتمال نجاحه في اللغة ٠,٦ فإن:

١٢ / احتمال نجاحه في مادة على الأقل هو:

(أ) ٠,٨٨	(ب) ٠,٧٧	(ج) ٠,٣٥	(د) ٠,٧٥
----------	----------	----------	----------

١٣ / احتمال نجاحه في مادة واحدة فقط هو:

(أ) ٠,٤٦	(ب) ٠,٦٤	(ج) ٠,٦٦	(د) ٠,٤٤
----------	----------	----------	----------

١٤ / احتمال نجاحه في أكثر من مادة هو:

(أ) ٠,٢٤	(ب) ٠,٤٤	(ج) ٠,٤٢	(د) ٠,٢٤
----------	----------	----------	----------

السؤال الخامس: توافرت لديك المعادلات الآتية:

(١) $١٣ \text{ س} + ١٧ \text{ ص} = ٥٩١$

(٢) $١٥ \text{ س} + ١١ \text{ ص} = ٥٠١$

١٥ / المحدد العام (Δ) (محدد المعاملات) هي:

(أ) ١١٢ -	(ب) ١٢١	(ج) ٢١١	(د) ٢١١ -
-----------	---------	---------	-----------

١٦ / Δ س = محدد بسيط س هي:

(أ) ١٢٠٦	(ب) ٦١٢٠	(ج) ٦٢١٠	(د) ٢٠١٦ -
----------	----------	----------	------------

١٧ / Δ ص = محدد بسيط ص هي:

(أ) ٢٣٥٢ -	(ب) ٢٥٣٢	(ج) ٢٢٥٣	(د) ٢٣٣٥
------------	----------	----------	----------

١٨ / قيمة س هي:

(أ) ٨١	(ب) ١٨	(ج) ٨٨	(د) ١١
--------	--------	--------	--------

١٩ / قيمة ص هي:

(أ) ٢١	(ب) ١٢	(ج) ٢٢	(د) ١١
--------	--------	--------	--------

السؤال السادس:

تمتلك إحدى الشركات مخزينين بكل منهما مجموعة سلع موزعة كما يلي:

المخزن السلعة	الأول	الثاني
ممتازة	١٨	٢٣
جيدة	١٩	٢٢
تالفة	١٣	٥
مجموع	٥٠	٥٠

سحبت سلعة واحدة من كل مخزن بطريقة عشوائية:

٢٠ / احتمال الوجدتين ممتازة هو:

- (أ) ٠,٦٦١٥ (ب) ٠,١٦٥٦ (ج) ٠,٥١٦٦ (د) ٠,٥٥٦١

٢١ / احتمال الوجدتين من نوع جيد هو:

- (أ) ٠,١٢٧٦ (ب) ٠,٢١٦٧ (ج) ٠,١٦٧٣ (د) ٠,٧٣١٦

٢٢ / احتمال الوجدتين من نوع تالفة هو:

- (أ) ٠,٠٦٦٠ (ب) ٠,٠١٦ (ج) ٠,١٢٦ (د) ٠,٠٣٦

٢٣ / احتمال الأولى ممتازة هو:

- (أ) ٠,١٩٤٤ (ب) ٠,٤١٩٤ (ج) ٠,٤٩١١ (د) ٠,٤١٩٤

٢٤ / احتمال الأولى جيدة هو:

- (أ) ٠,٨١٢٢ (ب) ٠,٨٢١٢ (ج) ٠,٢١٢٨ (د) ٠,٨٨٢٢

٢٥ / احتمال واحدة على الأقل ممتازة هو:

- (أ) ٠,٤٥٤٦ (ب) ٠,٦٥٤٤ (ج) ٠,٤٤٥٦ (د) ٠,٥٤٦٤

٢٦ / احتمال واحدة على الأقل جيدة هو:

- (أ) ٠,٨٨٥٦ (ب) ٠,٨٦٥٢ (ج) ٠,٨٢٥٦ (د) ٠,٦٥٢٨

٢٧ / احتمال واحدة على الأقل تالفة هو:

- (أ) ٠,٤٣٣ (ب) ٠,٣٤٤ (ج) ٠,٣٣٤ (د) ٠,٥٣٤

٢٨ / احتمال الثانية جيدة هو:

- (أ) ٠,٨٧٢٢ (ب) ٠,٢٧٢٨ (ج) ٠,٧٢٨٢ (د) ٠,٨٢٧٢

٢٩ / احتمال الثانية ممتازة هو:

- (أ) ٠,٢٩٤٤ (ب) ٠,٤٢٩٤ (ج) ٠,٩٤٣٤ (د) ٠,٤٤٩٢

٣٠ / احتمال واحدة فقط ممتازة هو:

- (أ) ٠,٦٣٩ (ب) ٠,٩٢٦ (ج) ٠,٢٩٦ (د) ٠,٩٦٣

السؤال السابع:

إدارة بإحدى الشركات بها ١٢ موظفاً رغبة الإدارة في تكوين لجنة من أربعة منهم.
٣١ / عدد طرق اختيار اللجنة هو:

٩٥٤ (د)	٥٤٩ (ج)	٩٤٥ (ب)	٤٩٥ (أ)
٣٢ / عدد طرق ترتيب أعضاء اللجنة في أربعة أماكن هو:			
٤٢ (د)	٢٢ (ج)	٢٤ (ب)	٤٤ (أ)
٣٣ / عدد طرق ترتيب أعضاء اللجنة في مكانين فقط هو:			
١٢ (د)	٢٢ (ج)	١١ (ب)	٢١ (أ)

السؤال الثامن: توافرت لديك المعادلات الآتية:

(١)	٦٣ =	٥ س + ٣ ص
(٢)	١٢٠ =	٨ س + ٤ ع
(٣)	٦٦ =	٧ ص + ٢ ع

باستخدام المحددات لحل هذه المعادلات نجد أن:

٣٤ / المحدد العام (محدد معاملات المتغيرات) هو:

٨١١ (د)	٨١٨ (ج)	٨٨١ (ب)	١٨٨- (أ)
---------	---------	---------	----------

٣٥ / المحدد العام (محدد معاملات المتغيرات) هو:

٩٦٢١ (د)	٩١٦٢ (ج)	١٦٩٢- (ب)	١٢٩٦ (أ)
----------	----------	-----------	----------

٣٦ / المحدد العام (محدد معاملات المتغيرات) هو:

١١٢٨- (د)	٢٢٨١ (ج)	٢١١٨ (ب)	٨١١٢ (أ)
-----------	----------	----------	----------

٣٧ / المحدد العام (محدد معاملات المتغيرات) هو:

٦٢٢٥ (د)	٢٢٥٦- (ج)	٢٥٦٢ (ب)	٦٥٢٢ (أ)
----------	-----------	----------	----------

السؤال التاسع:

في مفكوك المقدار: (س + ٤)^٦ نجد أن:

٣٨ / معامل س^٣ هو:

٨٠١٢ (د)	١٠٢٨ (ج)	٨١٢٠ (ب)	١٢٨٠ (أ)
----------	----------	----------	----------

٣٩ / معامل س هو:

٤٦١٤ (د)	٦١٤٤ (ج)	٦٤٤١ (ب)	٤٤١٦ (أ)
----------	----------	----------	----------

٤٠ / قيمة الحد الخالي من س هو:

٤٠٩٦ (د)	٦٠٩٤ (ج)	٩٠٦٤ (ب)	٤٩٦٠ (أ)
----------	----------	----------	----------

إجابة النموذج الرابع

إجابة السؤال الأول: متوالية عددية

$$٧٨ = ٥١٣ + ١٢ = ٥٠ + ١ + ٥٨ + ١ = ٦٤ + ٩٤$$

$$\boxed{٤ = ٥}$$

$$١٢ = ٥٣ = ٥٠ - ١ - ٥٨ + ١ = ٦٤ - ٩٤$$

وبالتعويض:

$$\boxed{١٣ = ١}$$

$$٧٨ = ١٣ \times ٤ + ١٢$$

المتوالية هي:

$$\boxed{١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ٢٥ ، ٢٩ ، ، ،}$$

$$(١) \quad ٤٥ = ٤ \times ٨ + ١٣ = ٩٤$$

$$(٢) \quad ٣٣ = ٤ \times ٥ + ١٣ = ٦٤$$

$$(٣) \quad ١٣٨ = [٤ \times ٥ + ١٣ \times ٢] \frac{٦}{٢} = ٦٤ \rightarrow$$

$$(٤) \quad ٣١٠ = [٤ \times ٩ + ١٣ \times ٢] \frac{١٠}{٢} = ١٠٤ \rightarrow$$

$$(٥) \quad ٥٧ = ٤ \times ١١ + ١٣ = ١٢٤$$

إجابة السؤال الثاني: متوالية هندسية

$$..... ، ، ٤٠٥ ، ١٣٥ ، ٤٥ ، ١٥ ، ٥$$

$$(٦) \quad ٣٢٨٠٥ = ٥^{(٣)} = ٥^٣ = ٩٤$$

$$(٧) \quad ١٤٧٦٢٠ = \frac{١ - ١٠^{(٣)}}{١ - ٣} \times ٥ = \frac{١ - ١٠^٣}{١ - ٣} \times ١ = ١٠٤ \rightarrow$$

إجابة السؤال الثالث: المقدار

$$(س - ٤) = ٦(٤ - ٠) + (س - ٤) + ٦(٤ - ١) + (س - ٤) + ٠(٤ - ٢) + (س - ٤)$$

$$+ ٦(٤ - ٣) + (س - ٤) + ٦(٤ - ٢) + (س - ٤) + ٠(٤ - ١) + (س - ٤)$$

$$+ ٦(٤ - ٠) + (س - ٤)$$

$$(٨) \quad \text{قيمة الحد الخالي من س} = ٤٠٩٦$$

$$(٩) \text{ الحد الخامس} = {}^6P_4(-٤)^4(١-٤)^2 = ٣٨٤٠ \text{ س}^٢$$

$$(١٠) \text{ معامل س}^٣ = {}^6P_3(-٤)^3(١-٤)^٣ = -١٢٨٠$$

$$(١١) \text{ معامل س}^٢ = {}^6P_2(-٤)^2(١-٤)^٤ = ٣٨٤٠$$

اجابة السؤال الرابع:

احتمال نجاحه في الرياضة = ٠,٧ ، احتمال نجاحه في اللغة = ٠,٦

(١٢) احتمال السلعتين من نوع جيد = ١ - احتمال الرسوب في المادتين

$$٠,٨٨ = ٠,٤ \times ٠,٣ - ١ =$$

حل آخر

$$\text{الاحتمال} = ٠,٧ + ٠,٦ - ٠,٧ \times ٠,٦ = ٠,٨٨$$

حل ثالث

$$\text{الاحتمال} = ٠,٧ \times ٠,٤ + ٠,٦ \times ٠,٣ + ٠,٧ \times ٠,٦ =$$

$$= ٠,٢٨ + ٠,١٨ + ٠,٤٢ = ٠,٨٨$$

(١٣) احتمال نجاح الطالب في مادة واحدة فقط

$$= ٠,٧ \times ٠,٤ + ٠,٦ \times ٠,٣ = ٠,٤٦$$

(١٤) احتمال نجاحه في أكثر من مادة

$$= ٠,٧ \times ٠,٦ = ٠,٤٢$$

اجابة السؤال الخامس:

$$(١٥) \Delta = \begin{vmatrix} ١٧ & ١٣ \\ ١١ & ١٥ \end{vmatrix} = ١٤٣ - ٢٠٥ = -١١٢$$

$$(١٦) \Delta \text{ س} = \begin{vmatrix} ١٧ & ٥٩١ \\ ١١ & ٥٠١ \end{vmatrix} = -٢٠١٦$$

$$(١٧) \Delta \text{ ص} = \begin{vmatrix} ٥٩١ & ١٣ \\ ٥٠١ & ١٥ \end{vmatrix} = -٢٣٥٢$$

$$(١٨) \text{ قيمة س} = \frac{٢٠١٦-}{١١٢-} = ١٨$$

$$(١٩) \text{ قيمة ص} = \frac{٢٣٥٢-}{١١٢-} = ٢١$$

اجابة السؤال السادس:

$$(٢٠) \text{ احتمال الوجدتين ممتازة} = \frac{٢٣}{٥٠} \times \frac{١٨}{٥٠} = ٠,١٦٥٦$$

$$(٢١) \text{ احتمال الوجدتين من نوع جيد} = \frac{٢٢}{٥٠} \times \frac{١٩}{٥٠} = ٠,١٦٧٢$$

$$(٢٢) \text{ احتمال الوجدتين من نوع تالف} = \frac{٥}{٥٠} \times \frac{١٣}{٥٠} = ٠,٠٢٦$$

$$(٢٣) \text{ احتمال الأولى ممتازة} = \frac{٢٧}{٥٠} \times \frac{١٨}{٥٠} = ٠,١٩٤٤$$

$$(٢٤) \text{ احتمال الأولى جيدة} = \frac{٢٨}{٥٠} \times \frac{١٩}{٥٠} = ٠,٢١٢٨$$

(٢٥) احتمال أن تكون واحدة على الأقل ممتازة

= ١ - الاحتمال العكسي

$$= ١ - \frac{٢٧}{٥٠} \times \frac{٣٢}{٥٠} = ٠,٦٥٤٤$$

$$\text{حل آخر الاحتمال} = \frac{٢٣}{٥٠} \times \frac{١٨}{٥٠} - \frac{٢٣}{٥٠} + \frac{١٨}{٥٠} =$$

$$= ٠,٦٥٤٤ = ٠,١٦٥٦ - ٠,٤٦ + ٠,٣٦ =$$

$$(٢٦) \text{ احتمال واحدة على الأقل جيدة} = ١ - \frac{٢٨}{٥٠} \times \frac{٣١}{٥٠} = ٠,٦٥٢٨$$

(٢٧) احتمال واحدة على الأقل تالفة = ١ - الوجدتين نوع آخر

$$٠,٣٣٤ = \frac{٤٥}{٥٠} \times \frac{٣٧}{٥٠} - ١ =$$

$$٠,٢٧٢٨ = \frac{٣١}{٥٠} \times \frac{٢٢}{٥٠} = \text{احتمال الثانية جيدة} \quad (٢٨)$$

$$٠,٢٩٤٤ = \frac{٣٢}{٥٠} \times \frac{٢٣}{٥٠} = \text{احتمال الثانية ممتازة} \quad (٢٩)$$

(٣٠) احتمال واحدة فقط ممتازة

$$٠,٤٨٨٨ = \frac{٣٢}{٥٠} \times \frac{٢٣}{٥٠} + \frac{٢٧}{٥٠} \times \frac{١٨}{٥٠} =$$

اجابة السؤال السابع:

$$(٣١) \text{ عدد طرق اختيار اللجنة} = ١٢ \text{ ق} = \frac{٩ \times ١٠ \times ١١ \times ١٢}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = ٤٩٥ \text{ طريقة}$$

(٣٢) عدد طرق ترتيب اللجنة في أربعة أماكن

$$٤! = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤ \text{ طريقة}$$

$$(٣٣) \text{ عدد طرق ترتيب اللجنة في مكانين} = ٢! = ٢ \times ١ = ٢ \text{ طريقة}$$

اجابة السؤال الثامن:

$$(١) \quad ٦٣ = ٥ \text{ س} + ٣ \text{ ص}$$

$$(٢) \quad ١٢٠ = ٨ \text{ س} + ٤ \text{ ع}$$

$$(٣) \quad ٦٦ = ٧ \text{ ص} + ٢ \text{ ع}$$

$$(٣٤) \quad \Delta = \text{المحدد العام} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ٠ \\ ٨ & ٠ & ٤ \\ ٠ & ٧ & ٢ \end{vmatrix} = -١٨٨$$

$$(٣٥) \quad \Delta \text{ س} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ٦٣ \\ ٨ & ٠ & ١٢٠ \\ ٠ & ٧ & ٦٦ \end{vmatrix} = -١٦٩٢$$

$$(36) \Delta \text{ص} = \begin{vmatrix} 0 & 63 & 5 \\ 4 & 120 & 8 \\ 2 & 66 & 0 \end{vmatrix} = -1128$$

$$(37) \Delta \text{ع} = \begin{vmatrix} 63 & 3 & 5 \\ 120 & 0 & 8 \\ 66 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -2256$$

اجابة السؤال التاسع:

$$\begin{aligned} (س + ٤)^6 &= {}^6C_0 (٤)^0 (س)^6 + {}^6C_1 (٤)^1 (س)^5 + {}^6C_2 (٤)^2 (س)^4 + {}^6C_3 (٤)^3 (س)^3 + \\ &+ {}^6C_4 (٤)^4 (س)^2 + {}^6C_5 (٤)^5 (س)^1 + {}^6C_6 (٤)^6 (س)^0 \end{aligned}$$

$$(38) \text{معامل س}^3 = {}^6C_3 (٤)^3 = \frac{٤ \times ٥ \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 120$$

$$(39) \text{معامل س}^0 = {}^6C_0 (٤)^0 = 1$$

$$(٤٠) \text{قيمة الحد الخالي من س} = (٤)^6 = 4096$$